

## ΕΝΑ ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΟ ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Οικονόμου Ανδρέας**, Καθηγητής ΠΑΤΕΣ/ΣΕΛΕΤΕ, Γαμβέττα 93<sup>Α</sup> 54644 Θεσσαλονίκη, τηλ.: 031-84 3785, seletethe@hol.gr

**Οικονόμου Πέτρος**, Καθηγητής Μ.Ε., Καλβρύτων 7, 55133 Καλαμαριά, τηλ: 031-43 48 70, rati@athserv.otenet.gr  
**Τζεκάκη Μαριάννα**, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 54006 Θεσσαλονίκη, τηλ: 031- 995037, tzekaki@nured.auth.gr

**Λέξεις Κλειδιά:** διδακτικό βιβλίο, θεωρία οικοδόμησης της γνώσης, διδακτική προσέγγιση.

**Θέμα:** Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση – Νέα σχολικά βιβλία.

**Επίπεδο Εκπαίδευσης:** Γυμνάσιο.

**Κατηγορία:** Διδακτικό βιβλίο.

### Περίληψη

Στην εισήγηση αυτή παρουσιάζεται το καινούργιο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου.

Η παρουσίαση επικεντρώνεται στη θεμελίωση και την ανάλυση της νέα μορφής διδασκαλίας που εγκαινιάζεται με την εισαγωγή του βιβλίου αυτού στη σχολική τάξη. Η νέα αυτή μορφή, στηριγμένη στις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης, αναλύεται ως προς τον τρόπο λειτουργίας του μαθητή, τον τρόπο λειτουργίας του καθηγητή και την οργάνωση της σχολικής τάξης, ενώ εξηγείται η διάρθρωση των εννοιών του νέου βιβλίου με τρόπο ώστε να εξυπηρετεί την νέα αυτή μορφή.

Παράλληλα, τεκμηριώνεται η διαδοχή των δραστηριοτήτων, προβλημάτων και διδακτικών καταστάσεων που περιλαμβάνονται στο βιβλίο, όπως και ο τρόπος παράθεσης του μαθηματικού περιεχομένου, ώστε, από τη μία μεριά, να εξασφαλίζεται η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και η μαθηματική ακρίβεια, και, από την άλλη, να ανταποκρίνεται στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών.

### Abstract

The presentation introduces one of the new schoolbooks for the first high school grade and focuses on the grounding and analysis of the new teaching approach that the introduction of this book initiates. This approach, based on the constructivist theories, is analyzed according to the way the students and the teacher function in the classroom and the way the classroom is organized., as well as the sequencing of the units of the book in a way that this new approach is served.

Furthermore, the succession of the activities, problems and didactic situations in the book and the way the mathematical content is presented are documented. This way support the development of mathematic concepts and respect the mathematical precision as far as the cognitive level of the students is concerned.

### Εισαγωγή

Η εισήγηση αυτή αποτελεί την πρώτη παρουσίαση ενός από τα τρία νέα βιβλία Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, που εγκρίθηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ύστερα από διαγωνισμό<sup>1</sup>. Το βιβλίο γράφτηκε σύμφωνα με τους όρους της προκήρυξης, οι οποίοι αναφέρονται:

- Στο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου.
- Σε περιορισμούς σχετικά με το σύνολο των σελίδων και τον τρόπο γραφής (μέγεθος, γραμματοσειρές κτλ.).

Το βιβλίο<sup>2</sup> έπρεπε να παραδοθεί σε συγκεκριμένο και ιδιαίτερα περιορισμένο χρονικό διάστημα, ενώ πολύ δεσμευτικοί για τους συγγραφείς ήταν οι όροι της προκήρυξης που αφορούσαν το Πρόγραμμα Σπουδών, με τους οποίους η συγγραφική ομάδα δεν ήταν πάντα σύμφωνη.

Η συγγραφή, όμως, ενός διδακτικού βιβλίου δεν βασίζεται μόνο στο μαθηματικό περιεχόμενο που καθορίζεται από το Πρόγραμμα Σπουδών. Είναι μια σύνθεση πολλών συνιστωσών, όπως είναι το μαθηματικό περιεχόμενο και το εννοιολογικό πλαίσιο (Sierpinski & Lerman, 1996, Vergnaud, 1996), το γνωστικό επίπεδο των μαθητών και η προηγούμενη μαθηματική τους εμπειρία, η μαθηματική γλώσσα (Steinbring *et al*, 1998, Brown, 1997), οι αναπαραστάσεις (Nunes, 1996), οι μαθηματικές διαδικασίες, οι πολιτισμικές εφαρμογές (Bishop, 1988), οι ασκήσεις και τα προβλήματα (Verschaffel & de Corte, 1996), η σύνδεση με το ευρύτερο πλαίσιο, η αισθητική και, πάνω απ' όλα, η δημιουργικότητα και η ευχαρίστηση (Niss, 1996). Απ' όλα όμως τα παραπάνω η σπουδαιότερη συνιστώσα, κατά την αντίληψη των συγγραφέων, είναι ο τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών που επιδιώκεται να εφαρμοστεί στη σχολική τάξη.

<sup>1</sup> Η συγγραφική ομάδα του βιβλίου αποτελείται από τους: Σ. Μπαλή, Α. Οικονόμου, Π. Οικονόμου και Μ. Τζεκάκη.

<sup>2</sup> Ο όρος «σχολικό βιβλίο» περιλαμβάνει το Βιβλίο του Μαθητή, το Βιβλίο Λύσεων και το Βιβλίο του καθηγητή. Στο τελευταίο παρουσιάζεται ένα θεωρητικό πλαίσιο διδασκαλίας των Μαθηματικών και αναλυτικές οδηγίες για την αποτελεσματική χρήση του νέου σχολικού βιβλίου.

Δεδομένου ότι είναι δύσκολο να παρουσιαστούν όλα τα στοιχεία τα οποία συνυπολογίστηκαν στην συγγραφή του βιβλίου, στην εισήγηση αυτή θα αναλυθούν μόνο:

- η διδακτική αντίληψη που ενσωματώνεται, και
- η επιστημολογική θεώρηση των Μαθηματικών που υπονοείται.

### **Προς την κατεύθυνση της οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης**

Οι δυσκολίες των μαθητών στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και το ξεπέρασμά τους αποτελεί αντικείμενο της Διδακτικής των Μαθηματικών τα τελευταία 30 χρόνια. Η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης (κονστрукτιβισμός) αναγνωρίζεται διεθνώς ως η θεωρία που συμβάλλει αποτελεσματικά προς την κατεύθυνση αυτή. Στην Ευρώπη, γίνονται συστηματικές προσπάθειες εφαρμογής της θεωρίας αυτής στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επίσης, στις Ηνωμένες Πολιτείες, τα Mathematical Standards που συντάσσονται από το National Council for Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) και με βάση τα οποία εκπονούνται τα περισσότερα Αναλυτικά Προγράμματα στη χώρα αυτή, θεμελιώνονται πάνω στη θεωρία του κονστрукτιβισμού.

Η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης στηρίζεται στις παρακάτω δύο γενικές αρχές (von Glaserfeld, 1991, Lerman, 1989):

- Η γνώση δεν προσλαμβάνεται παθητικά αλλά οικοδομείται δυναμικά από το υποκείμενο που μαθαίνει.
- Η μάθηση έχει προσαρμοστικό χαρακτήρα, δηλαδή το υποκείμενο δεν ανακαλύπτει μια προϋπάρχουσα πραγματικότητα αλλά οργανώνει τον εμπειρικό του κόσμο.

Οι θεωρητικές αυτές αρχές έχουν συνέπειες τόσο στη μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης και μάθησης των μαθητών όσο και της διδασκαλίας. Ιδιαίτερα, οι επιπτώσεις των αρχών αυτών στη λειτουργία της σχολική τάξης είναι οι εξής (Jaworski, 1994).

1. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται όχι στην επανάληψη συμπεριφορών από τη μεριά των μαθητών, αλλά στην κατανόηση των εννοιών.
2. Ο εκπαιδευτικός συνειδητοποιεί ότι η γνώση δεν μεταδίδεται με την απλή παρουσίασή της, αλλά κατακτάται από την προσωπική δραστηριοποίηση των μαθητών.
3. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη δραστηριότητα των μαθητών και παρακολουθεί τα λάθη που υποδηλώνουν με ποιο τρόπο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το έργο και τις έννοιες που αντιμετωπίζουν.

Τα στοιχεία αυτά προσανατολίζουν τη συγγραφή ενός διδακτικού βιβλίου στην κατεύθυνση της δραστηριοποίησης των μαθητών. Έτσι, όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω, η εισαγωγή κάθε έννοιας στηρίζεται σε δραστηριότητες, οικεία προβλήματα, διερεύνηση καταστάσεων και σημαντικές εφαρμογές με τα οποία οι μαθητές καλούνται να ασχοληθούν, ώστε να οδηγηθούν βαθμιαία στην κατάκτηση της έννοιας-στόχου.

### **Προς την κατεύθυνση ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και διεύρυνσης της μαθηματικής εμπειρίας**

Η κυρίαρχη κατεύθυνση, διεθνώς, για το «κάνω Μαθηματικά», όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, επικεντρώνεται κυρίως στο υποκείμενο της μάθησης παρά στο μαθηματικό περιεχόμενο. Το γεγονός αυτό έχει δημιουργήσει σοβαρά ερωτήματα ως προς τη σύνδεση των εμπειριών των μαθητών με την ίδια τη μαθηματική γνώση.

Ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει ότι δεν «διδάσκει» στους μαθητές αλλά τους μαθαίνει να αναπτύξουν μαθηματικές γνώσεις. Παραμένει όμως το ερώτημα για το πώς η δραστηριότητα των μαθητών τους οδηγεί σε κατασκευές και γενικεύσεις και, κατά συνέπεια, σε έννοιες που συνδέονται με το συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο - στόχο (von Glaserfeld, 1991).

Στα ερωτήματα αυτά απαντούν οι θεωρίες των διδακτικών καταστάσεων και του εννοιολογικού πεδίου (Brousseau, 1997, Vergnaud, 1996). Σύμφωνα με αυτές:

- Οι μαθηματικές έννοιες αναδεικνύονται μέσα από κατάλληλες καταστάσεις-προβλήματα.
- Για την προσέγγιση μιας έννοιας είναι απαραίτητο να μελετηθεί το εννοιολογικό της πεδίο, δηλαδή, το σύνολο των καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στο οποίο η έννοια λειτουργεί και ολοκληρώνεται το νόημά της.

Η αποσπασματική ή μονόπλευρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας εμπεριέχει τον κίνδυνο να δημιουργήσει στους μαθητές «εμπόδια», δηλαδή, αντιλήψεις και ερμηνείες που περιορίζουν την πλήρη κατανόηση και χρήση της.

Συνέπειες των παραπάνω στη συγγραφή ενός βιβλίου είναι οι εξής:

- Οργάνωση δραστηριοτήτων που καλύπτουν, κατά το δυνατόν, το εννοιολογικό πεδίο της αντιμετωπιζόμενης έννοιας.
- Διάκριση του μαθηματικού περιεχομένου (ορισμοί, ιδιότητες, κτλ) από το σύνολο των παραδειγμάτων και εφαρμογών.
- Διατήρηση εκείνης της μαθηματικής ακρίβειας και αυστηρότητας που αποτελεί τη χρυσή τομή ανάμεσα στο μαθηματικά ορθό και στο επίπεδο των δυνατοτήτων των μαθητών.

Τα παραπάνω στοιχεία κάνουν φανερή την περιπλοκότητα του εγχειρήματος της συγγραφής ενός διδακτικού βιβλίου και του συνόλου των αποφάσεων που χρειάζεται να ληφθούν ώστε να προκύψει ένας πετυχημένος «διδακτικός μετασχηματισμός» της μαθηματικής γνώσης σε γνώση διδάξιμη στα παιδιά της συγκεκριμένης ηλικίας. Αν συνυπολογιστεί ότι για κάθε ιδιαίτερη έννοια υπάρχει μια πολυετής ερευνητική δουλειά που μελετά τα ιδιαίτερα επιστημολογικά χαρακτηριστικά της, τις διδακτικές δυσκολίες, τις επικρατούσες αντιλήψεις και τα επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών, όπως και τους πειραματισμούς με διδακτικές προσεγγίσεις, γίνεται κατανοητό ότι ένα διδακτικό

βιβλίο χρειάζεται, εκτός από μία πρώτη γραφή, μια συνεχή διαδικασία πειραματισμού, δοκιμών και διορθώσεων, που να δίνει τη δυνατότητα συνεχών βελτιώσεων και, παράλληλα, βελτιώσεων στη μαθηματική εκπαίδευση.

### **Η παρουσίαση του νέου βιβλίου**

Τα βιβλία Μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν ως διδακτικά βιβλία για τη Μέση Εκπαίδευση καθώς και αυτά που χρησιμοποιούνται σήμερα, στο σύνολό τους αρκούνται σε εξαιρετικά περιορισμένο ρόλο. Αποτελούν το βοήθημα του μαθητή στην "κατ' οίκον" μελέτη του. Ο μαθητής σημειώνει στο πρόχειρό του την παράγραφο που διδάχτηκε και τους αριθμούς των ασκήσεων που πρέπει να λύσει και, επιστρέφοντας στο σπίτι, ανοίγει το σχολικό βιβλίο, μελετά προσπαθώντας να «εμπεδώσει» την προσφερόμενη γνώση και, τέλος, λύνει τις σχετικές ασκήσεις.

Τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία ανταποκρίνονται με συνέπεια στο ρόλο για τον οποίο προορίζονται. Στην πραγματικότητα αποτελούν «επιστημονικά» βιβλία Μαθηματικών, «μεταφρασμένα» σε «γλώσσα μαθητή», δηλαδή, απλουστευμένα και διατυπωμένα ώστε να ανταποκρίνονται στο γνωστικό επίπεδο των συγκεκριμένων, από άποψη ηλικίας, μαθητών.

Με το νέο βιβλίο Μαθηματικών της Α' Γυμνασίου, όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα, επιχειρείται ο επαναπροσδιορισμός κύριων χαρακτηριστικών της διδακτικής πράξης και η προσαρμογή της σχολικής εργασίας σε νεότερες και καλύτερα τεκμηριωμένες διδακτικές αντιλήψεις. Τα δεδομένα που αναθεωρούνται και αναλύονται στη συνέχεια μπορούν να κωδικοποιηθούν στους παρακάτω άξονες:

- Ο ρόλος του μαθητή σε μια σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών.
- Ο ρόλος του καθηγητή σε μια σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών.
- Η οργάνωση μιας σύγχρονης τάξης Μαθηματικών.
- Διδακτικά και επιστημολογικά εμπόδια, λάθη των μαθητών.

### **Ο μαθητής σε μια σύγχρονη τάξη Μαθηματικών**

Στην παραδοσιακή διδακτική, η μαθηματική γνώση προσφέρεται έτοιμη στον μαθητή, ο οποίος απλώς καλείται να την κατανοήσει και να την απομνημονεύσει.

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η σύγχρονη τάξη των Μαθηματικών θέλει το μαθητή να αναλαμβάνει πρωτοβουλία, να ερευνά, να ανταλλάσσει γνώμες με τους συμμαθητές του, να συζητά πιθανούς τρόπους αντιμετώπισης των προβλημάτων, να δοκιμάζει ιδέες, να ελέγχει τα συμπεράσματά του και να τα τεκμηριώνει, προσπαθώντας να αποδείξει την ορθότητά τους.

Το βιβλίο οργανώνει την τάξη και το μαθητή προς αυτή την κατεύθυνση.

Στο **πρώτο μέρος** κάθε ενότητας προτείνονται, εισαγωγικά, δραστηριότητες που ο μαθητής καλείται να διαπραγματευτεί για να προσεγγίσει την καινούρια γνώση. Η δράση του τον οδηγεί να την κατανοήσει καλύτερα και να τη χρησιμοποιήσει σε ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών.

Είναι αυτονόητο ότι η επιτυχής αντιμετώπιση μιας ή περισσότερων Δραστηριοτήτων από μέρους του μαθητή δε σημαίνει, κατ' ανάγκη, ότι ο μαθητής έχει κατακτήσει και τη ζητούμενη από αυτόν μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση για να είναι ολοκληρωμένη πρέπει να συστηματικοποιηθεί αποκτώντας τα τυπικά χαρακτηριστικά της, προσαρμοσμένα στο γνωστικό επίπεδο του μαθητή της πρώτης τάξης του Γυμνασίου.

Για το λόγο αυτό, στο **δεύτερο μέρος** κάθε ενότητας, η γνώση αυτή οργανώνεται και παρουσιάζεται με έναν "επίσημο" τρόπο, σε ειδικό πλαίσιο. Στην παρουσίαση αυτή αποφεύγεται η πολύ αυστηρή παράθεση ορισμών και θεωρημάτων, αλλά επιδιώκεται η μαθηματική ακρίβεια, για να μην οδηγηθούν οι μαθητές σε λάθη και παρανοήσεις.

Η διάκριση των δραστηριοτήτων, των παραδειγμάτων και των εφαρμογών από το μαθηματικό περιεχόμενο, τόσο μέσα στο βιβλίο όσο και από τον ίδιο το διδάσκοντα, βοηθά τον μαθητή να διαχωρίσει το Μαθηματικά ουσιώδες από το πεδίο χρήσης και εφαρμογής του. Αυτή η διδακτική πρακτική ανταποκρίνεται σε ένα διπλό στόχο:

- από τη μια, ο μαθητής κατακτά τη μαθηματική γνώση με ένα αποτελεσματικότερο και μονιμότερο (μέσα από ένα πρόβλημα που η συγκεκριμένη μαθηματική γνώση οδηγεί στη λύση του), ενώ
- από την άλλη, καλλιεργείται η ικανότητά του να αντιμετωπίζει πραγματικά προβλήματα και καταστάσεις, ικανότητα που, χωρίς καμιά αμφιβολία, είναι χρήσιμη τόσο στη σχολική όσο και στη μετασχολική ζωή του.

### **Ο καθηγητής σε μια σύγχρονη τάξη Μαθηματικών**

Το πρώτο μέλημα των καθηγητών των Μαθηματικών είναι η ενθάρρυνση των μαθητών να δραστηριοποιηθούν για να αντιμετωπίσουν τις καταστάσεις και τα προβλήματα που τους προτείνονται. Ωστόσο, το πέρασμα από την ασαφή και εξειδικευμένη μαθηματική γνώση, που κατέκτησε ο μαθητής αντιμετωπίζοντας τις Δραστηριότητες, στη συστηματική και συγκεκριμένη μαθηματική γνώση που ζητείται από αυτόν, η «επισημοποίηση», δηλαδή, της γνώσης που αναδείχτηκε μέσα από τη λύση των προβλημάτων, είναι το κρισιμότερο σημείο στη δουλειά του διδάσκοντα. Τα πορίσματα της δραστηριότητας των μαθητών πρέπει να ολοκληρωθούν μέσα από ένα συνεχή διάλογο της τάξης και να μετασχηματιστούν σε μαθηματικά συμπεράσματα, σε μαθηματική «θεωρία».

Από τα παραπάνω προκύπτει ένας νέος ρόλος για τον καθηγητή της τάξης, σημαντικά διαφοροποιημένος από τον παραδοσιακό ρόλο. Στο σύγχρονο τρόπο διδασκαλίας το ενδιαφέρον εστιάζεται στην ανατροπή του παθητικού χαρακτήρα που επιφυλάσσει στο μαθητή η παραδοσιακή διδασκαλία. Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη είναι απαραίτητο

να μεταβληθεί και ο ρόλος του καθηγητή μέσα στην τάξη. Ο καθηγητής καλείται να είναι, όχι πια ο αποκλειστικός φορέας της γνώσης, αλλά ο οργανωτής του πλαισίου μέσα στο οποίο θα αναπτυχθεί η ερευνητική δραστηριότητα των μαθητών. Συμβουλεύει τους μαθητές, απαντά στις απορίες τους, τους εμπνυχώνει.

Μια συνοπτική περιγραφή της διδακτικής πράξης κάτω από την οπτική γωνία που διαμορφώνεται με τα προηγούμενα και το νέο ρόλο που καλείται να παίξει το σχολικό βιβλίο, οδηγεί στο παρακάτω σχήμα:

- Ξεκινώντας το νέο μάθημα οι μαθητές με την υπόδειξη του καθηγητή, προχωρούν στην αντιμετώπιση των Δραστηριοτήτων που υποδεικνύονται από το βιβλίο. Η αντιμετώπιση των Δραστηριοτήτων γίνεται απαραίτητα από τους ίδιους τους μαθητές, με ιδιαίτερη έμφαση στους αδύνατους. Ο καθηγητής παρακολουθεί την πρόοδο των μαθητών, κάνει υποδείξεις, βοηθάει, απαντάει σε ερωτήσεις, ενισχύει τους μαθητές και συντονίζει τη δραστηριότητά τους στα περιθώρια του διαθέσιμου χρόνου. Οι μαθητές, αντιμετωπίζοντας τις δραστηριότητες, συζητούν μεταξύ τους, ανταλλάσσουν απόψεις και αλληλοβοηθούνται.

- Αφού η αντιμετώπιση μιας Δραστηριότητας ολοκληρωθεί, τα συμπεράσματα των μαθητών παρουσιάζονται και συζητούνται στην τάξη. Με την ολοκλήρωση όλων των Δραστηριοτήτων -κάποιες μπορούν να παραληφθούν ή να αντικατασταθούν με άλλες που θα προτείνει ο διδάσκων, όπου το θεωρεί σκόπιμο- ο καθηγητής πρέπει να επισημάνει την καινούργια μαθηματική γνώση "ενοποιώντας" τις απόψεις και τα συμπεράσματα των μαθητών, "ανακεφαλαιώνοντας" και "επισημοποιώντας" τις γνώσεις που αποκτήθηκαν. Αυτή η συστηματικοποιημένη μαθηματική γνώση είναι σαφώς διακριτή στο βιβλίο με τη μορφή «θεωρίας» και συνοδεύεται από αντίστοιχα παραδείγματα ώστε να διευκολύνεται ο μαθητής στη διάκριση του ουσιώδους (Μαθηματικά) από το επουσιώδες (αυτό που αναφέρεται στα Μαθηματικά), διάκριση που συνήθως είναι δύσκολη για το μαθητή.

- Η ολοκλήρωση του μαθήματος προϋποθέτει την αντιμετώπιση των "ερωτήσεων για αυτοέλεγχο και συζήτηση" που κλείνουν τη διδασκαλία κάθε ενότητας. Σκοπός αυτών των ερωτήσεων είναι η ανάδειξη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης που αποκτήθηκε, των δυσκολιών που πιθανόν περικλείει, των ορίων εφαρμογής και χρήσης της. Μερικές από αυτές ανοίγουν συζητήσεις και δίνουν επεκτάσεις της γνώσης που παρουσιάστηκε. Συγχρόνως βοηθούν το μαθητή να αντιληφθεί σε ποιο βαθμό κατανόησε την καινούργια γνώση και πόση προσπάθεια πρέπει να καταβάλλει ακόμη.

### **Η οργάνωση μιας σύγχρονης τάξης Μαθηματικών**

Είναι φανερό ότι η μεθόδευση της διδακτικής πράξης με τον τρόπο που προτείνεται δεν είναι πραγματοποιήσιμη σε συνθήκες αποκλειστικά "μετωπικής" διδασκαλίας. Γενικά, η "μετωπική" διδασκαλία, όπου ο καθηγητής απευθύνεται στο σύνολο των μαθητών της τάξης, ευνοεί τη "μετάδοση της γνώσης" από το διδάσκοντα και όχι την προσωπική έρευνα και δραστηριότητα των μαθητών και, κατά συνέπεια, την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης από αυτούς.

Η οργάνωση της διδασκαλίας που προτείνεται και αντιστοιχεί στο περιεχόμενο του συγκεκριμένου σχολικού βιβλίου, περιλαμβάνει μια συνεχή εναλλαγή ατομικής, ομαδικής και μετωπικής δουλειάς στην τάξη, ώστε τα τρία κλασικά μοντέλα οργάνωσης της σχολικής τάξης να εναλλάσσονται διαρκώς ανάλογα με το συγκεκριμένο αντικείμενο αλλά και με το στάδιο που βρίσκεται το μάθημα στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Συγκεκριμένα, προτείνεται η εναλλαγή ατομικής και ομαδικής εργασίας στο στάδιο όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις Δραστηριότητες. Αντίθετα, είναι σκόπιμο να προτιμηθεί η "μετωπική" εργασία στο στάδιο όπου παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τη δουλειά των μαθητών και ολοκληρώνεται το μάθημα με την "επισημοποίηση" των μαθηματικών γνώσεων.

Η ατομική και η ομαδική οργάνωση της τάξης επιτρέπουν την ενεργοποίηση των μαθητών καθώς και την προσαρμογή του μαθήματος στο ρυθμό και τις δυνατότητές τους, σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από ότι το "μετωπικό" μάθημα. Ιδιαίτερα, η ομαδική εργασία αντιστρατεύεται το πνεύμα ανταγωνισμού το οποίο παρουσιάζεται υπερβολικά έντονο στις μικρότερες τάξεις, ενώ καλλιεργεί την ικανότητα συλλογικής δουλειάς που θα χρειαστεί στους μαθητές ακόμη και στη διάρκεια της επαγγελματικής τους ζωής.

Επίσης, η συνεχής εναλλαγή ατομικού, ομαδικού και "μετωπικού" μαθήματος περιορίζει τον κίνδυνο της μονοτονίας, που οφείλεται στην τυποποιημένη εφαρμογή ενός μοναδικού τρόπου οργάνωσης της σχολικής εργασίας και αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών για το μάθημα.

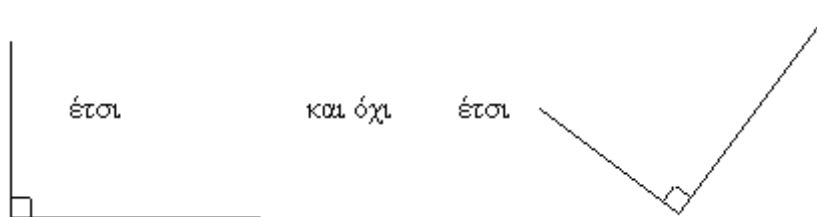
### **Διδακτικά και επιστημολογικά εμπόδια, λάθη των μαθητών**

Στη μαθησιακή διαδικασία συχνά υπεισέρχονται κάποιες παράμετροι που δεν είναι εμφανείς για τον διδάσκοντα και απαιτούν ιδιαίτερη εκπαίδευσή του, δεδομένου ότι τόσο η επισήμανσή τους όσο και η αντιμετώπισή τους αποτελούν αντικείμενο συστηματικής έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι παράμετροι αυτές, που μπορούν να στεγαστούν κάτω από τον όρο "αντιλήψεις" των μαθητών, οδηγούν σε ελλιπή ή εσφαλμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ή διαδικασιών, σχηματίζοντας νοητικά εμπόδια τα οποία συχνά είναι πολύ δύσκολο να ανατραπουν από τη διδασκαλία. Οι αντιλήψεις αυτές ερμηνεύουν συχνά την αποτυχία των μαθητών και βρίσκονται πίσω από επαναλαμβανόμενα λάθη τους.

Ένα αποτελεσματικό σχολικό βιβλίο Μαθηματικών οφείλει να λαμβάνει υπόψη τις αντιλήψεις που κρύβονται πίσω από αυτά ώστε:

- να αντιμετωπίζονται τα εμπόδια τα οποία έχουν ήδη σχηματιστεί,
- να αποφεύγεται, κατά το δυνατό, ο σχηματισμός νέων εμποδίων.

Ένα κλασικό παράδειγμα «διδασκτικού εμποδίου» είναι η αντίληψη των μαθητών για την καθετότητα, η οποία παρουσιάζεται συνήθως στα σχολικά βιβλία και στην τάξη στην κατακόρυφη και την οριζόντια διεύθυνση. Συνήθως η ορθή γωνία παρουσιάζεται



Ο μαθητής περιορίζει στην αντίληψή του την έννοια της καθετότητας και την ταυτίζει με τη σχέση κατακόρυφης-οριζόντιας ευθείας με αποτέλεσμα να του είναι δύσκολο να αναγνωρίσει μια γωνία σε πλάγια θέση ως ορθή ή να χαράξει τα ύψη ενός τριγώνου. Στη συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση, όπως και σε πολλές άλλες, η καθημερινή εξωτερική πραγματικότητα επιτείνει το πρόβλημα, δεδομένου ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη διεύθυνση αποτελούν τις προνομιακές κατευθύνσεις του χώρου που μας περιβάλλει (τοίχος, πίνακας, τετράδιο κ.λ.π.). Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη συστηματική παρουσίαση της καθετότητας ή των ορθών γωνιών σε πλάγιες θέσεις.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα "διδασκτικού εμποδίου" είναι η κατανόηση της έννοιας της ισότητας από το μαθητή. Ο μαθητής που έλυσε επιτυχώς ένα πρόβλημα αφαίρεσης - διαίρεσης παρουσιάζει τη λύση του ως εξής:  $180-60=120:3=40$ . Η ισότητα στην αντίληψη αυτού του μαθητή δεν είναι μαθηματική σχέση, αλλά ένα είδος γέφυρας που του επιτρέπει να κινηθεί από τη μια πράξη στην άλλη. Η μη έγκαιρη αντιμετώπιση του προβλήματος θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καταστάσεων με τη μορφή:

$$5x-3x+8=4$$

$$5x-3x=2x+8=4 \quad (\text{από γραπτό μαθητή Β' Γυμνασίου})$$

Στο σχολικό βιβλίο έχει ληφθεί συστηματική μέριμνα για την αποφυγή σχηματισμού παρόμοιων καταστάσεων καθώς και για την αντιμετώπιση όσων προϋπάρχουν ως συνέπεια προηγούμενων διδασκτικών ενεργειών. Επίσης, στο βιβλίο του καθηγητή, στο ειδικό μέρος κατά ενότητα, γίνεται συστηματική αναφορά και εφιστάται η προσοχή του στις αντίστοιχες περιπτώσεις.

Μια άλλη κατηγορία "εμποδίων" στο αντιληπτικό σύστημα του μαθητή συνδέεται με τη δυσκολία που παρουσιάζουν κάποιες μαθηματικές έννοιες, ανεξάρτητα από τη διδασκαλία τους. Τα εμπόδια αυτά ονομάζονται «επιστημολογικά εμπόδια» (Brousseau, 1997). Αδιάνευστος μάρτυρας αυτής της δυσκολίας είναι η ιστορική τους εξέλιξη.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της δυσκολίας είναι η έννοια του 0, το οποίο γίνεται αντιληπτό από το μαθητή σαν "τίποτε", με αποτέλεσμα να είναι αρκετά δύσκολη για αυτόν η πράξη 0-3 ("πως να βγάλω τρία από το τίποτε").

Παρόμοιες δυσκολίες συνδέονται με την έννοια του αρνητικού αριθμού και την κατανόηση του συνόλου των ρητών (ο μαθητής στην ερώτηση «πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 4 και στο 7;» απαντάει «δύο, ο 5 και ο 6»).

Η συνήθης διδασκαλία (σχολικό βιβλίο - καθηγητής) έχοντας άγνοια του ζητήματος, θεωρεί ότι η κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών είναι τόσο προφανής για το μαθητή όσο και για το συγγραφέα του βιβλίου ή τον διδάσκοντα, με σοβαρές συχνά συνέπειες για την κατοπινή πορεία του μαθητή. Για παράδειγμα, ένα σύντομο πέρασμα στην έννοια του αρνητικού αριθμού (ως αρνητική θερμοκρασία), έχει θετικά αποτελέσματα όσον αφορά το διδακτικό χρόνο, όχι όμως και το γνωστικό σύστημα του μαθητή. Το γεγονός ότι ο μαθητής κατανοεί την αρνητική θερμοκρασία δε σημαίνει ότι κατανοεί και τον αρνητικό αριθμό. Απόδειξη αυτής της διαπίστωσης είναι η δυσκολία των μαθητών να αντιμετωπίσουν τις πράξεις των ακεραίων.

Στο νέο σχολικό βιβλίο (με τις αντίστοιχες υποδείξεις για τον διδάσκοντα) έννοιες που παρουσιάζουν ιδιαίτερες αντιληπτικές δυσκολίες εξετάζονται συστηματικά, ενώ γίνεται προσπάθεια να καλυφθούν και να "φωτιστούν" μέσα από μια ποικιλία παραδειγμάτων - δραστηριοτήτων, ώστε ο μαθητής να αντιληφθεί τις έννοιες αυτές μέσα από όσο το δυνατόν περισσότερες και διαφορετικές πηγές προέλευσης αλλά και εφαρμογής τους.

### Δυσκολίες στη χρήση του νέου διδασκτικού βιβλίου

Εκτεταμένη πειραματική εφαρμογή του τρόπου διδασκαλίας που προκύπτει από τις προτάσεις που παρουσιάστηκαν και αναδεικνύεται μέσα από τις σελίδες του νέου σχολικού βιβλίου, έδειξε ότι οι διδάσκοντες συναντούν σημαντικές δυσκολίες στην υλοποίησή του. Οι δυσκολίες αυτές μπορούν να περιγραφούν συνοπτικά ως εξής:

- Οι διδάσκοντες δεν αντιστέκονται στον πειρασμό να παρουσιάσουν πρόωρα τη μαθηματική γνώση ώστε να «διευκολύνουν» τη δραστηριότητα των μαθητών και να επιταχύνουν το μάθημα, ακυρώνοντας όμως τον πραγματικό στόχο που είναι η οικοδόμηση αυτής της γνώσης από τους μαθητές.

- Οι διδάσκοντες δεν διαθέτουν αρκετό χρόνο ώστε να ολοκληρώσουν οι μαθητές την προσπάθειά τους. Μόλις κάποιος καλός μαθητής ολοκληρώσει τη δραστηριότητα η προσπάθεια των άλλων μαθητών διακόπτεται και το μάθημα μετατρέπεται σε παραδοσιακό, όπου ο διδάσκων, με τη συνεργασία των καλύτερων μαθητών της τάξης, εκθέτει τη νέα γνώση.

▪ Οι διδάσκοντες έχουν την τάση να ελέγχουν και να επικυρώνουν ή να απορρίπτουν τα αποτελέσματα της δουλειάς των μαθητών, ενώ ο ρόλος αυτός πρέπει να ανατίθεται στην τάξη, που καταλήγει σε συμπεράσματα μέσα από τον διάλογο. Από αυτόν τον διάλογο αναδεικνύονται και διορθώνονται πιθανές αποτυχίες κάποιων μαθητών.

Γενικά διαπιστώνεται ότι η προηγούμενη διδακτική εμπειρία του καθηγητή των Μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας, οδηγώντας τον σε διδακτικές συμπεριφορές που βρίσκονται έξω από το πλαίσιο του νέου σχολικού βιβλίου και του τρόπου διδασκαλίας που συνεπάγεται. Είναι φανερό ότι ο διδάσκων πρέπει να καταβάλει σημαντική προσπάθεια, ώστε να αποφύγει να παρασυρθεί από το "εύκολο" και "γρήγορο" μάθημα που πιθανά εφάρμοζε ως τώρα, ακυρώνοντας μ' αυτόν τον τρόπο κάθε μεταρρυθμιστική προσπάθεια.

Η έκταση των αλλαγών στη διδασκαλία των Μαθηματικών που συνεπάγεται η χρήση του νέου σχολικού βιβλίου και των βιβλίων που θα ακολουθήσουν για τις επόμενες τάξεις του Γυμνασίου καθώς και οι δυσκολίες που διαπιστώθηκαν ως προς την υλοποίησή του από τους διδάσκοντες, επιβάλλουν τη συστηματική επιμόρφωση του συνόλου των καθηγητών που διδάσκουν Μαθηματικά στην Α' Γυμνασίου. Η γνωριμία με το νέο τρόπο διδασκαλίας και η κατανόησή του σε βάθος, αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για την υιοθέτησή του από τους διδάσκοντες, οι οποίοι πρέπει να πειστούν για τη σημασία των μεταβολών που προωθούνται στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

### **Βιβλιογραφία**

Bednarz, N. et al. (eds.) *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. (1989), *Culture and Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht.

Brousseau, G (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Brown, T. (1997) *Mathematics Education and Language*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1995) *Constructing Mathematical Knowledge*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Glaserfeld von E. (ed.) (1991) *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Jaworski, B. (1994) *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Inquiry*. London-Washington-D.C.: The Falmer Press.

Lerman, S. (1989) Constructivism, Mathematics and Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 20, Kluwer, The Netherlands, pp. 211-233.

Mammana, C. & Villani, V. (1998) *Perspectives on the Teaching of Geometry for 21st Century, an ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Mansfield, H. et al. (eds.) (1996) *Mathematics for tomorrow's Young Children, International Perspectives on Curriculum*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

National Council for Teachers of Mathematics (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*.

Niss, M. (1996) Goals of Mathematical Teaching in Bishop, A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Part one). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. pp. 11-48.

Nunes, T. (1996) Systems of signs and mathematical reasoning in Nunes, T. & Bryant, P. (1996) *Learning and Teaching Mathematics, An International Perspective*. UK: Psychology Press Ltd. pp. 29-44.

Sierpinska, A & Lerman, S (1997) Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education in Bishop, A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Part one). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. pp. 827-876.

Skovmose, O. (1994) *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. et al. (eds.) (1998) *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G (1996) The nature of mathematical concepts in Nunes, T. & Bryant, P. (1996) *Learning and Teaching Mathematics, An International Perspective*. UK: Psychology Press Ltd. pp. 5-28.

Verschaffer, L. & de Corte, E. (1996) Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding a problem solving in the primary school? In Nunes, T. & Bryant, P. (1996) *Learning and Teaching Mathematics, An International Perspective*. UK: Psychology Press Ltd. pp. 69-98.