ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Κωνσταντίνος Χρίστου, Επίκουρος Καθηγητής
Γιώργος Φιλίππου, Αναπληρωτής Καθηγητής
Διεύθυνση Επικοινωνίας: Κωνσταντίνος Χρίστου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία 1678, Τ.Κ. 20537, edchrist@ucy.ac.cy

Λέξεις Κλειδιά: λύση προβλήματος, σχήμα, διαδικασίες επίλυσης, διδασκαλία προβλήματος.

Περίληψη

Στη μελέτη αυτή παρουσιάζεται ένα νέο μοντέλο διδασκαλίας της λύσης προβλήματος με βάση τη θεωρία του σχήματος. Το μοντέλο στηρίζεται στη διαγραμματική απεικόνιση του προβλήματος με στόχο την ανάπτυξη νοερών σχημάτων που υποβοηθούν τους μαθητές στη λύση λεκτικών, κυρίως, προβλημάτων. Η διδασκαλία με βάση το προτεινόμενο μοντέλο διακρίνεται σε τέσσερις αλληλοεξαρτώμενες φάσεις: τη φάση της αναγνώρισης σχήματος, της ερμηνείας του σχήματος, της επιλογής των κατάλληλων σχημάτων και της εφαρμογής. Το μοντέλο αυτό εφαρμόστηκε σε τάξεις του δημοτικού σχολείου για δέκα περίπου εβδομάδες. Τα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται στο άρθρο αυτό, αναφέρονται σε μαθητές της Ε΄ τάξης και έδειξαν ότι η εφαρμογή του μοντέλου διδασκαλίας ήταν πιο αποτελεσματική από την παραδοσιακή διδασκαλία στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλήματος.

Abstract

In this report, we develop a model for teaching mathematical problem solving based on schema knowledge. The model makes extensive use of the graphical representation of problems to enhance students problem-solving schemas. Instruction proceeds through four successive phases: recognition, interpretation, strategy development, and application. The design extends for about twenty-four teaching periods that spread over ten weeks. The model was field-tested in Grades five and six. The results presented in this report refer to students in Grade 5 and showed significant differences between pre-test and post-test scores in favor of the experimental group. This is an encouraging indication that the model is effective in improving students' problem solving ability.

Εισαγωγή και Στόχος της Έρευνας

Η λύση προβλήματος ήταν πάντοτε βασικός στόχος των σχολικών μαθηματικών. Πολλές έρευνες έχουν γίνει σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών και γλωσσικών δομών των διαφόρων τύπων προβλημάτων, με τον προσδιορισμό των παραγόντων που συμβάλλουν στη δυσκολία των μαθηματικών προβλημάτων και με την ανάπτυξη προγραμμάτων ή μοντέλων διδασκαλίας (De Corte & Verschaffel, 1987· Riley & Greeno, 1988· Nesher, 1994· Shierpinska, 1994· Christou & Philippou, 1998).

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων είκοσι χρόνων έχουν αναπτυχθεί τρεις κυρίως τύποι μοντέλων διδασκαλίας του μαθηματικού προβλήματος. Ο πρώτος τύπος μοντέλων διδασκαλίας στηρίζεται στις φάσεις διδασκαλίας του Polya με έμφαση στην εκμάθηση των στρατηγικών λύσης προβλήματος (Polya, 1973). Ο δεύτερος τύπος αναφέρεται στην κατανόηση του προβλήματος μέσω της υποβολής και σύνθεσης προβλημάτων εκ μέρους των μαθητών και των δασκάλων (NCTM, 1989). Τέλος, ο τρίτος τύπος μοντέλων διδασκαλίας δίνει έμφαση στην κατανόηση των γλωσσικών δομών του προβλήματος με στόχο τη διαφοροποίηση των δομών αυτών ώστε το πρόβλημα να γίνεται ευκολότερο ή συνθετότερο, ανάλογα με τις ανάγκες και το επίπεδο των μαθητών (Rudnitsky, Etheredge, Freeman, & Gilbert, 1995).

Η εφαρμογή, όμως, των πιο πάνω μοντέλων δεν έχει βελτιώσει αισθητά την ικανότητα των μαθητών στη λύση προβλήματος (Lester, 1994). Πρόσφατα, η Marshall (1995) έχει προτείνει ένα μοντέλο διδασκαλίας και αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλήματος, που στηρίζεται στη θεωρία του σχήματος. Ο βασικός στόχος της μελέτης αυτής είναι η παρουσίαση ενός μοντέλου διδασκαλίας με βάση τη θεωρία του σχήματος και τις ιδέες της Marshall και η εξέταση της αποτελεσματικότητάς του στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Το μοντέλο αυτό, αν και στηρίζεται στις ιδέες της Marshall (1995), παρουσιάζει αρκετές διαφορές, γιατί έχει σχεδιασθεί με τρόπο ώστε να καλύπτει τις ανάγκες των μαθητών στον ελληνικό χώρο. Στο προτεινόμενο μοντέλο προσπαθήσαμε, επίσης, να ενσωματώσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των τριών μοντέλων διδασκαλίας, που έχουν αναφερθεί πιο πάνω, τροποποιώντας το μοντέλο της Marshall και δίνοντας έμφαση στη διαγραμματική απεικόνιση τόσο των γλωσσικών δομών του προβλήματος όσο και των σχέσεων που ενυπάρχουν σε αυτό.

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Ο όρος «σχήμα» έχει πολλές σημασίες και έχει χρησιμοποιηθεί τόσο από τον Αριστοτέλη όσο και από τον Πλάτωνα. Η κυριολεκτική σημασία της λέξης αναφέρεται σε γεωμετρικά διαγράμματα, ενώ η μεταφορική σημασία της έννοιας αναφέρεται σε τρόπους οργάνωσης πληροφοριών, χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων που συνδέονται μεταξύ τους

και παρέχουν το πλαίσιο αναγνώρισης αντικειμένων ή αφηρημένων εννοιών που έχουν την ίδια δομή. Η Marshall (1995) προσδιορίζοντας τις κύριες διαστάσεις της έννοιας του σχήματος, δίνει έμφαση στην αλληλεπίδραση της μνήμης και της δράσης. Το σχήμα, σύμφωνα με τη Marshall, οικοδομείται από τις εμπειρίες του ατόμου, αλλά ταυτόχρονα, οι εμπειρίες οδηγούν τόσο στο σχηματισμό νέων σχημάτων όσο και στην αναδιοργάνωση των σχημάτων, που έχουν ήδη εδραιωθεί στη μνήμη των μαθητών. Παρ' όλο που δεν είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε πώς πραγματικά εργάζεται και λειτουργεί η μνήμη, το σχήμα αποτελεί το μέσο με το οποίο οι αλληλοσυσχετιζόμενες πληροφορίες διατηρούνται και οργανώνονται στην ανθρώπινη μνήμη. Έτσι, τα σχήματα που αναφέρονται στις ίδιες γνωστικές περιοχές συσχετίζονται μεταξύ τους και πολλές φορές παρουσιάζονται ως δίκτυα γνώσεων και αναπαραστάσεων. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αντιληφθούμε τα σχήματα ταυτόχρονα ως μηχανισμούς αποθήκευσης και επαναφοράς γνώσεων και πληροφοριών, αλλά και οργάνωσης αλληλένδετων πληροφοριών ή δεδομένων σε μια ενιαία δομή.

Όπως έχει λεχθεί η κυριολεκτική έννοια του σχήματος αναφέρεται στη γεωμετρική αναπαράσταση και απεικόνιση πληροφοριών, που αποτελεί φυσική λειτουργία της ανθρώπινης νόησης. Η διαγραμματική απεικόνιση αποτελεί, επομένως, τρόπο έκφρασης της κατανόησης της δομής και γλωσσικής μορφής των μαθηματικών προβλημάτων και υποβοηθάει το μαθητή στην κατανόηση του προβλήματος, στην ερμηνεία των πληροφοριών που δίνονται σε μια ιστορία προβλήματος και αποτελεί τρόπο αιτιολόγησης και επεξήγησης των ιδεών και σκέψεων των μαθητών (Χρίστου και Φιλίππου, 1997).

Το πρώτο βήμα σε μια πετυχημένη προσπάθεια λύσης ενός προβλήματος είναι η κατανόηση των σημαντικών στοιχείων του προβλήματος. Μέσω της κατανόησης δημιουργείται μια νοερή αναπαράσταση των πληροφοριών του προβλήματος, που με τη σειρά της οδηγεί στην αλληλοσυσχέτιση των πληροφοριών και στην ταυτόχρονη αναγνώριση της δομής των σχέσεων σε παρόμοια σχήματα που ήδη ενυπάρχουν στη μνήμη του λύτη. Η δημιουργία κάποιου νοερού μοντέλου αναπαράστασης του προβλήματος αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη λύση του. Επομένως, η κατάστρωση ενός σχεδίου λύσης είναι κατορθωτή μόνο, αν ο μαθητής συνδέσει το υπό λύση πρόβλημα με τα σχήματα προβλημάτων που έχει ήδη οικοδομήσει.

Ο Mayer (1987) διακρίνει την αναπαράσταση του προβλήματος σε δύο φάσεις: τη φάση της μετάφρασης του προβλήματος, που περιλαμβάνει τη μετατροπή κάθε πρότασης σε μια εσωτερική νοερή αναπαράσταση και τη φάση της ολοκλήρωσης, που περιλαμβάνει τη διασύνδεση όλων των προτάσεων και των πληροφοριών του προβλήματος σε μια ενιαία δομή. Η επανάληψη σχηματισμού της ίδιας δομής οδηγεί στη δημιουργία ενός νοητικού σχήματος, που αποτελεί στη συνέχεια μέρος του ρεπερτορίου λύσεων που οικοδομεί ο μαθητής. Η συσχέτιση ενός νέου προβλήματος με ένα προϋπάρχον σχήμα, υποβοηθάει το λύτη στην ανάλυση των χαρακτηριστικών του προβλήματος και στην οργάνωση του τρόπου σκέψης για επίλυσή του. Ταυτόχρονα, το σχήμα αποτελεί το μέσο περιγραφής και ταξινόμησης των στοιχείων και πληροφοριών του προβλήματος και έτσι επιτυγχάνεται η κατανόηση των σχέσεων που περιγράφονται σε αυτό. Με αυτήν την έννοια το σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία λύσης προβλήματος, γιατί συμβάλλει στην ανάπτυξη της κατανόησης και επιλογής των στρατηγικών που θα οδηγήσουν στη λύση του.

Η πραγματική αξία της ταξινόμησης ενός προβλήματος σε ένα σχήμα βρίσκεται ακριβώς στη νοερή αναπαράσταση των σχέσεων που συνδέουν τα δεδομένα του προβλήματος. Μέσω του σχήματος, επιτυγχάνεται η άμεση απεικόνιση της γλωσσικής μορφής του προβλήματος, που υποβοηθάει όχι μόνο το μαθητή στην κατανόηση του προβλήματος, αλλά και το δάσκαλο στην κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών και των δυσκολιών που συναντούν στη διαδικασία επίλυσης. Η δημιουργία από τους μαθητές ενός σχήματος και η απεικόνιση ενός προβλήματος μέσω του σχήματος παρέχουν ασφαλείς ενδείξεις ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει τόσο τη σύνταξη του προβλήματος όσο και τη δομή του, τις σχέσεις, δηλαδή, που διασυνδέουν τα δεδομένα του.

Η διδακτική διαδικασία που οδηγεί στη δημιουργία σχήματος δίνει έμφαση κυρίως στην ανάλυση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του προβλήματος και στη συνέχεια στη διασύνδεσή τους. Αποτελεί μια φυσική διαδικασία και λειτουργία της ανθρώπινης νόησης, γιατί στην ουσία μετασχηματίζει ένα κείμενο σε μια άλλη συμβολική μορφή, τη γραφική απεικόνιση, που είναι πιο κατανοητή μορφή έκφρασης της μαθηματικής δομής του προβλήματος. Έτσι, η διδασκαλία μέσω του σχήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων, αφού στόχος της είναι η αποσαφήνιση και αιτιολόγηση των γλωσσικών και σχεσιακών δομών του προβλήματος. Επιπρόσθετα, η διδασκαλία μέσω σχήματος ενσωματώνει την αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών, γιατί ο δάσκαλος είναι σε θέση να παρακολουθεί την πρόοδο των μαθητών σε όλα τα στάδια της κατανόησης και επίλυσης του προβλήματος.

Το Πρόγραμμα Διδασκαλίας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πολλά προγράμματα λύσης προβλήματος έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια με στόχο την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων (Lester, 1994· Nesher, 1994). Μερικά από αυτά έδωσαν έμφαση στη δημιουργία σχημάτων και στον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατό να βοηθηθούν οι μαθητές στην προσπέλαση των δυσκολιών τους. Το προτεινόμενο μοντέλο διδασκαλίας αποτελεί μια σύνθεση και επέκταση των πιο πάνω προγραμμάτων. Συγκεκριμένα, το προτεινόμενο μοντέλο δίνει έμφαση:

- στη γραφική απεικόνιση των σχημάτων με βάση τα διαγράμματα που έχουν προταθεί από τη Marshall (1995),
- στην αναγνώριση των ουσιωδών στοιχείων του προβλήματος,

- στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στην αναγνώριση, εφαρμογή, δημιουργία και επιλογή σχημάτων,
- στη διδασκαλία της διαγραμματικής απεικόνισης σχημάτων.

Το προτεινόμενο πρόγραμμα εφαρμόστηκε για τρεις περίπου μήνες για δύο μέρες τη βδομάδα σε 10 σχολεία της Λευκωσίας και της Λεμεσού. Η διδασκαλία μέσω σχήματος οργανώθηκε με βάση τέσσερις αλληλοεπικαλυπτόμενες φάσεις: τη φάση αναγνώρισης του σχήματος, τη φάση ερμηνείας, τη φάση επιλογής και τη φάση εφαρμογής του σχήματος.

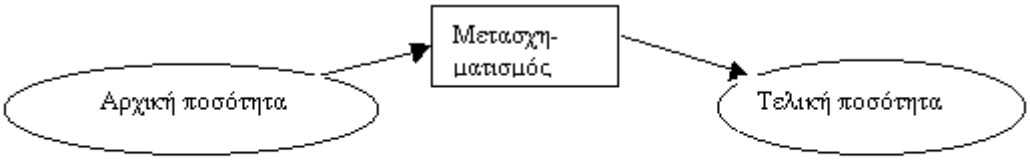
Φάση Αναγνώρισης: Η φάση αναγνώρισης είναι πολύ σημαντική για την ενεργοποίηση των υφιστάμενων σχημάτων ή για τη δημιουργία νέων σχημάτων στη μνήμη των μαθητών και επιτυγχάνεται μέσω της κατανόησης της κατάστασης ενός προβλήματος. Η δομή κάθε ομάδας ή κατηγορίας προβλημάτων περιέχει μερικά ουσιώδη χαρακτηριστικά που είναι παρόμοια σε όλα τα προβλήματα που μπορούν να υπαχθούν στη συγκεκριμένη κατηγορία. Τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελούν τα σταθερά στοιχεία που διακρίνουν τη δομή ενός προβλήματος και μας επιτρέπουν να ομαδοποιήσουμε τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τόσο στην καθημερινή ζωή τους όσο και στα εγχειρίδια των μαθηματικών. Η επισήμανση μοτίβων είναι απαραίτητη προϋπόθεση της ικανότητας για αναγνώριση της βασικής δομής ενός προβλήματος και της κατάταξής του σε μια συγκεκριμένη κατηγορία. Για αυτό οι δραστηριότητες για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην κατανόηση, συμπλήρωση και επέκταση αριθμητικών ή γεωμετρικών μοτίβων αποτελεί βασική δεξιότητα για την ανάπτυξη του σχήματος.

Ο στόχος της διδασκαλίας σε αυτήν τη φάση είναι η απόκτηση της ικανότητας αναγνώρισης. Αναμένεται ότι οι μαθητές θα μάθουν ότι υπάρχουν τέσσερις βασικές κατηγορίες προβλημάτων, τα προβλήματα αλλαγής, ομαδοποίησης, σύγκρισης και αναλογίας και θα αναγνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά της καθεμιάς από τις κατηγορίες αυτές. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, οι μαθητές συζητούσαν κατά τη διάρκεια των πρώτων τριών μαθημάτων προβλήματα που αντιπροσώπευαν την κάθε κατηγορία με σκοπό να μπορούν να βρίσκουν τις ομοιότητες και διαφορές τους. Στη συνέχεια τους παρουσιάζονταν διάφορα προβλήματα και ζητείτο από αυτούς να αναγνωρίσουν την κατηγορία ή το σχήμα στο οποίο μπορούν να τα εντάξουν. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης που γινόταν στην τάξη, δίνονταν τα ονόματα των σχημάτων (αλλαγή, ομαδοποίηση, σύγκριση και αναλογία) για καλύτερη επικοινωνία.

Φάση Ερμηνείας: Στη φάση αυτή δίνονταν και συζητούνταν τα κύρια χαρακτηριστικά, που είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου σχήματος. Οι μαθητές επεξηγούσαν με δικά τους λόγια τις λεπτομέρειες που διέκριναν τα σχήματα μεταξύ τους, για να μπορέσουν να δημιουργήσουν τη νοερή αναπαράσταση του σχήματος. Παράλληλα, στη φάση αυτή οι μαθητές διατύπωναν υποθέσεις για το σχήμα στο οποίο μπορεί να καταταχθεί ένα πρόβλημα και στη συνέχεια εξέταζαν την ορθότητα της υπόθεσής τους.

Κατά τη διάρκεια της φάσης ερμηνείας, που είχε διάρκεια οκτώ διδαχτικών περιόδων, οι μαθητές εισήχθηκαν στη διαγραμματική απεικόνιση των σχημάτων. Μέσω των διαγραμμάτων αυτών οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να αναπτύξουν και να ερμηνεύσουν τα χαρακτηριστικά του σχήματος και να κατατάξουν τα προβλήματα που τους δίνονταν στο ορθό σχήμα. Ένα ενδεικτικό διάγραμμα των προβλημάτων αλλαγής, που χρησιμοποιήθηκε στο πρόγραμμα, φαίνεται στο Σχήμα 1. Στο Σχήμα αυτό παρουσιάζεται η διαγραμματική απεικόνιση ενός προβλήματος αλλαγής. Τα προβλήματα αλλαγής, περιέχουν τρεις αριθμούς που είναι πολύ σημαντικοί: τον αριθμό που εκφράζει την ποσότητα πριν από την αλλαγή, τον αριθμό που εκφράζει την αλλαγή ή το μετασχηματισμό και τον αριθμό που εκφράζει την τελική ποσότητα. Στα προβλήματα αλλαγής διακρίνονται τουλάχιστον δυο χρονικές στιγμές. Η κατανόηση της χρονικής σειράς είναι απαραίτητο στοιχείο για να μπορέσει να φθάσει ο μαθητής στη λύση του προβλήματος. Τα προβλήματα αλλαγής μπορεί να λύνονται με πρόσθεση ή αφαίρεση, ανάλογα με τον άγνωστο του προβλήματος. Η αρχική και τελική ποσότητα αναπαριστάνονται στο Σχήμα 1 με τις ελλείψεις, ενώ ο μετασχηματισμός με το ορθογώνιο.

Κάθε σχήμα, φυσικά, έχει το δικό του μοναδικό τρόπο απεικόνισης. Για αυτό, σε κάθε μάθημα ο δάσκαλος και οι μαθητές συζητούσαν τα ουσιώδη στοιχεία του κάθε διαγράμματος και περιέγραφαν κάθε μέρος του καθώς επίσης και το ρόλο των βελών σε κάθε σχήμα. Τέλος, δινόταν στους μαθητές μια σειρά δραστηριοτήτων με στόχο να αντιληφθούν τους μετασχηματισμούς του προβλήματος, όταν διαφοροποιείται η ερώτηση ή τα δεδομένα του. Για παράδειγμα, δινόταν το πρόβλημα στους μαθητές και ζητείτο από αυτούς να καταγράψουν τις πληροφορίες του στις ελλείψεις ή ορθογώνια του διαγράμματος (για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά την εφαρμογή του προγράμματος, δείτε Χρίστου και Φιλίππου, 1997).



Σχήμα 1: Διαγραμματική Απεικόνιση των Προβλημάτων Αλλαγής

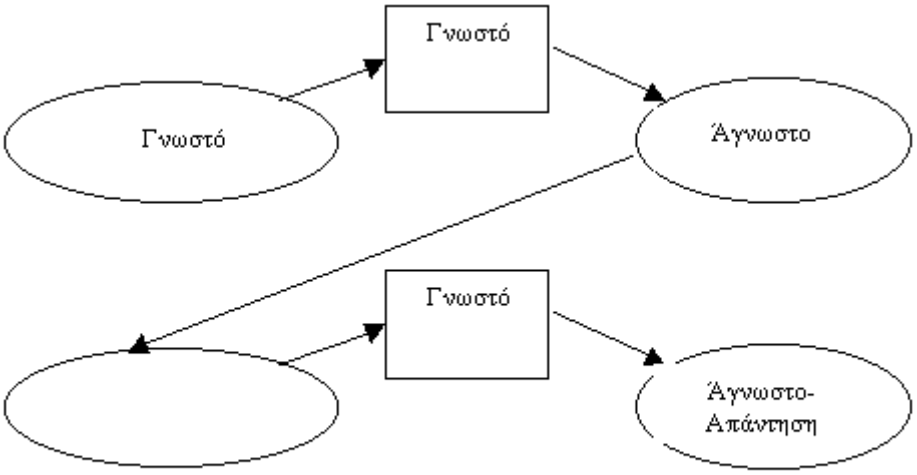
Φάση Επιλογής Σχημάτων: Στη φάση αυτή οι μαθητές κατασκευάζουν ένα σχέδιο λύσης του προβλήματος. Επιλέγουν, δηλαδή, το πιο κατάλληλο σχήμα για τη λύση του προβλήματος. Στη φάση της αναγνώρισης και τη φάση

της ερμηνείας οι μαθητές ασχολήθηκαν με προβλήματα μιας πράξης, ενώ στη φάση της επιλογής προχωρούσαμε σε προβλήματα δύο ή περισσότερων πράξεων, που αποτελούν, στην πραγματικότητα, συνδυασμό των προβλημάτων μιας πράξης.

Η διδασκαλία στη φάση αυτή επικεντρώνεται στην αναγνώριση των καταστάσεων που συνθέτουν ένα πρόβλημα δύο πράξεων. Όταν δίνονται, για παράδειγμα, προβλήματα που περιλαμβάνουν περισσότερες από μια καταστάσεις, ο μαθητής πρέπει να αποφασίσει ποια κατάσταση πρέπει να μελετήσει πρώτα και στη συνέχεια να αντιληφθεί πώς οι καταστάσεις του προβλήματος συνδέονται μεταξύ τους. Το Σχήμα 2 παρουσιάζει το διάγραμμα διδασκαλίας ενός προβλήματος δύο πράξεων, που περιλαμβάνει ένα συνδυασμό δύο σχημάτων αλλαγής. Στο Σχήμα 2 φαίνεται πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα ή η απάντηση στο πρώτο σχήμα αλλαγής ως δεδομένο για το δεύτερο σχήμα αλλαγής με τη σύνδεσή τους με το βέλος.

Οι μαθητές χρειάζονται αρκετά μαθήματα στη φάση αυτή, για να μπορούν να διακρίνουν τις καταστάσεις ενός σύνθετου προβλήματος και να προχωρούν στο σχεδιασμό του. Τονίζεται ότι ο σχεδιασμός είναι μια διαδικασία από τα πάνω προς τα κάτω, που δίνει μια εποπτική εικόνα του προβλήματος, ενώ η επίλυση ακολουθεί τη διαδικασία από τα κάτω προς τα πάνω. Για να αντιληφθούν τη διαδικασία κατασκευής γενικού σχεδίου, δινόταν στην αρχή στους μαθητές το γενικό σχέδιο του προβλήματος και ζητείτο από αυτούς να συμπληρώσουν τα διαγράμματα με τα δεδομένα του προβλήματος.

Η φάση της επιλογής είναι το κρίσιμο σημείο της διδασκαλίας προβλημάτων, γιατί είναι ακριβώς εδώ που παρουσιάζονται οι δυσκολίες των μαθητών. Έτσι, στο πρόγραμμα αφιερώθηκαν για τη φάση αυτή οι περισσότερες διδακτικές περίοδοι (15 περίπου σε κάθε τάξη). Έτσι, οι μαθητές απέκτησαν μια σχετική εμπειρία με το συνδυασμό όλων σχεδόν των σχημάτων.



Σχήμα 2: Διαγραμματική Μορφή του Σχήματος Αλλαγή-Αλλαγή

Φάση Εκτέλεσης: Η φάση αυτή είναι σχετικά η πιο εύκολη και περιλαμβάνει την εκτέλεση του σχεδίου της προηγούμενης φάσης. Στην πραγματικότητα, οι μαθητές έχουν να εκτελέσουν τις αριθμητικές πράξεις και να ελέγξουν την ορθότητά τους με βάση τη λογική του προβλήματος. Η φάση αυτή μπορεί, φυσικά, να ενσωματωθεί στην προηγούμενη φάση ή και να εκταθεί ώστε να περιλαμβάνει το στάδιο της επέκτασης με πιο σύνθετες δραστηριότητες ή μετασχηματισμούς του προβλήματος. Τέλος, μπορεί να περιλαμβάνει και το στάδιο της σύνθεσης ή και της δημιουργικής έκφρασης των μαθητών. Το τελευταίο δεν αποτέλεσε μέρος του προγράμματος που παρουσιάζεται στη μελέτη αυτή.

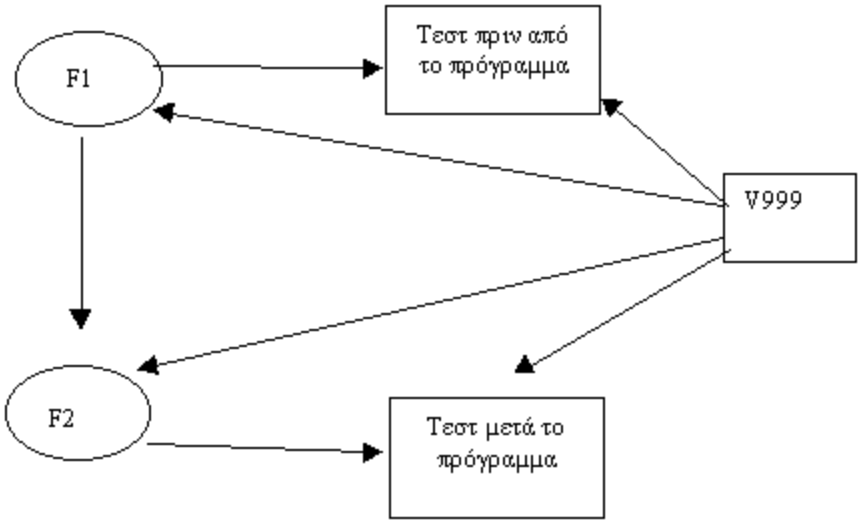
Εφαρμογή του Προγράμματος

Στο πρόγραμμα συμμετείχαν δέκα τμήματα Ε΄ τάξης (N=310 μαθητές). Τα πέντε από τα τμήματα αυτά αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα, ενώ τα υπόλοιπα την ομάδα ελέγχου. Στην πειραματική ομάδα έγινε η διδασκαλία της λύσης προβλήματος σύμφωνα με τη θεωρία του σχήματος, όπως έχει επεξηγηθεί πιο πάνω, ενώ η ομάδα ελέγχου διδάχτηκε τα ίδια ακριβώς προβλήματα με την παραδοσιακή μέθοδο.

Οι δάσκαλοι των πειραματικών ομάδων έτυχαν επιμόρφωσης στο Πανεπιστήμιο Κύπρου σχετικά με τη θεωρία σχήματος και τον τρόπο διδασκαλίας. Σε όλα τα τμήματα δόθηκαν τα ίδια τεστ πριν από την έναρξη των μαθημάτων και μετά το τέλος του προγράμματος, για να διαπιστωθεί το επίπεδο ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλήματος. Συγκεκριμένα, δόθηκαν δύο τεστ στην αρχή του προγράμματος και τα ίδια αυτά τεστ δόθηκαν και στο τέλος του προγράμματος. Το πρώτο τεστ περιλάμβανε 10 προβλήματα μιας πράξης και το δεύτερο 12 προβλήματα δύο πράξεων. Τα προβλήματα του πρώτου τεστ αντιπροσώπευαν τα σχήματα αλλαγής, ομαδοποίησης, σύγκρισης και αναλογίας και τα προβλήματα του δεύτερου τεστ συνδυασμούς των πιο πάνω σχημάτων.

Αποτελέσματα

Για την ανάλυση των δεδομένων και εξαγωγή συμπερασμάτων χρησιμοποιήθηκε η δομική ανάλυση με βάση το πρόγραμμα EQS. Στο Σχήμα 3 φαίνεται το διάγραμμα του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση. Οι βαθμοί των μαθητών στο τεστ πριν από την έναρξη του προγράμματος, θεωρούνται ως οι μετρήσιμες ενδείξεις του λανθάνοντα παράγοντα F1, που αντιπροσωπεύει την επίδοση των μαθητών στη λύση του μαθηματικού προβλήματος. Η ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλήματος μετά τη διδασκαλία συμβολίζεται με το λανθάνοντα παράγοντα F2, που είναι το αποτέλεσμα αφ' ενός της παρέμβασης και αφ' ετέρου της ικανότητας του μαθητή, όπως φάνηκε στην αρχή του προγράμματος (F1). Στο δεξιό μέρος του διαγράμματος φαίνεται η σταθερά V999, που συμβολίζει την αφετηρία και επηρεάζει τόσο την επίδοση των μαθητών πριν από την έναρξη του προγράμματος (F1) όσο και μετά (F2) (δείτε Bentler, 1995). Οι φορτίσεις των παραγόντων (F1 και F2), οι παλινδρομήσεις τους και οι αφετηρίες έχουν προκαθοριστεί να είναι ίσες για τις πειραματικές και τις ομάδες ελέγχου, ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε κατά πόσο υπήρξε διαφορά στις μεθόδους διδασκαλίας. Οι αφετηρίες έχουν καθοριστεί στις ομάδες ελέγχου να ισούνται με 0, ενώ στις πειραματικές μπορούσαν να υπολογιστούν από το πρόγραμμα.



Σχήμα 3: Το Μοντέλο που Χρησιμοποιήθηκε στην Ανάλυση

Από την ανάλυση φάνηκε ότι το μοντέλο ήταν αρκετά καλό, αφού ο δείχτης CFI (Comparative Fit Index) ήταν .934. Σύμφωνα με τη θεωρία, τιμές CFI>.9 θεωρούνται ικανοποιητικές και μπορούμε να δεχτούμε ότι τα δεδομένα ταιριάζουν στο μοντέλο που εξετάζουμε. Για να απαντήσουμε στο κύριο ερώτημα της μελέτης, κατά πόσο οι παράγοντες, που εκφράζουν τους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών και των δύο ομάδων στα τεστ πριν και μετά το πρόγραμμα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους, ανατρέχουμε στις εξισώσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν είναι οι αφετηρίες, που παρουσιάζουν τους μέσους των λανθανόντων παραγόντων F1 και F2. Επειδή, όπως έχουμε αναφέρει, έχουμε καθορίσει τις παραμέτρους των ομάδων ελέγχου σε 0, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι υπολογισμοί των παραμέτρων της πειραματικής ομάδας.

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας στο τεστ προβλημάτων που δόθηκε μετά το τέλος του προγράμματος ήταν πιο ψηλή από την επίδοση των μαθητών της ομάδας ελέγχου (.971, Z=10.036, p=.00). Φυσικά, οι μαθητές των πειραματικών ομάδων είχαν καλύτερη επίδοση και στο αρχικό τεστ, γιατί παρουσίασαν μέσο ίσο με .078, που είναι πιο ψηλός από το 0, που είχε καθοριστεί ως ο μέσος της ομάδας ελέγχου. Παρ΄ όλα αυτά, η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική, γιατί το Z=0.875, και έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι δύο ομάδες ήταν ισοδύναμες κατά την έναρξη του προγράμματος. Επομένως, η παρέμβαση που έγινε με βάση τη θεωρία του σχήματος, είχε θετικό αποτέλεσμα (.275) και συνέβαλε στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος (Z=2.124, p=.00).

F1 = 078*V999 + 1.000 D1 .089 (Τυπικό σφάλμα) .875 (τιμή Z)
F2 = .971*F1 + .275*V999 + 1.000 D2 .097 .129 (τυπικό σφάλμα) 10.036 2.124 (τιμή Z)

Πίνακας 1: Εξισώσεις που έχουν προκύψει από τη δομική ανάλυση, το τυπικό σφάλμα και οι τιμές Z

Συμπεράσματα

Η βασική παραδοχή της μελέτης ήταν ότι η ανάπτυξη σχήματος αποτελεί βασικό μηχανισμό μάθησης και επομένως η διδασκαλία θα πρέπει να στοχεύει στην ανάπτυξη βασικών σχημάτων προκειμένου οι μαθητές να βελτιώσουν την επίδοσή τους στη λύση προβλήματος (Marshall, 1995). Στην έρευνα αυτή αναπτύχθηκε ένα μοντέλο διδασκαλίας με βάση τη θεωρία του σχήματος, που εφαρμόστηκε δοκιμαστικά σε μερικά σχολεία της Κύπρου. Κατά τη διάρκεια εφαρμογής του μοντέλου δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση, σε όλες τις φάσεις διδασκαλίας, στην κατανόηση απλών και σύνθετων λεκτικών προβλημάτων μέσω της ανάλυσης και της σύνθεσής της ιστορίας του προβλήματος, στην ανάπτυξη της επικοινωνίας μέσω της συνεχούς συζήτησης και στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εργάζονται με προβλήματα που διαφοροποιούνται ανάλογα με τη γλωσσική τους μορφή και διατύπωση και στην κατανόηση της δομής των σχετικών προβλημάτων. Παράλληλα, βασικό στοιχείο του μοντέλου διδασκαλίας αποτέλεσε η δημιουργία νοερών αναπαραστάσεων του προβλήματος με στόχο τον εντοπισμό των ουσιωδών στοιχείων των προβλημάτων που τα κατατάσσουν στην ίδια κατηγορία. Μέσω της γραφικής αναπαράστασης των προβλημάτων επιδιώχθηκε η οικοδόμηση σχημάτων προβλημάτων, και η κατανόηση των συντακτικών και σχεσιακών δομών ενός προβλήματος

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρέχουν ενδείξεις ότι η εφαρμογή του μοντέλου με βάση τη θεωρία του σχήματος μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν λεκτικά προβλήματα. Αυτό φάνηκε από το γεγονός ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν τη βασική γνώση του σχήματος σε μικρό σχετικά χρονικό διάστημα και από το γεγονός ότι επιτεύχθηκε μεγαλύτερη πρόοδος στην ανάπτυξη της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων. Επιπρόσθετα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν επιμηκυνθεί ο χρόνος διδασκαλίας με βάση τη θεωρία του σχήματος, τότε τα αποτελέσματα θα μπορούν να είναι ακόμα πιο θετικά. Για αυτό το μοντέλο αυτό εφαρμόστηκε τόσο σε μαθητές της Δ΄ τάξης όσο και σε μαθητές της Στ΄ τάξης και αναμένουμε τα σχετικά αποτελέσματα. Αυτό, όμως, που περισσότερο είναι αναγκαίο να διαπιστώσουμε είναι η αποτελεσματικότητα του μοντέλου σε διάφορες κατηγορίες μαθητών.

References

Bentler, M.P. (1995). *EQS: Structural equations program manual*. Encino: Multivariate Software Inc.

De Corte, E. & Vercshaffel. L. (1987). The effect of semantic structure on the first-graders strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 363-381.

Lester, F.K. (1994). Musings about Mathematical Problem Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 660-675.

Marshall, S., P. (1995). Schemas in problem Solving. Cambridge University Press.

Mayer, R.E. (1987). *Educational Psychology: A Cognitive Approach*. Boston: Little Brown, 1987.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluationstandards for school mathematics*. Reston, Va: The Council.

Nesher, P. A., & Hershkovitz, S. (1994). Schemes in two-step problems. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 1-23.

Polya, G. (1973). How to solve it. New Jersey: Princeton University Press.

Riley, M.S., & Greeno J.G., (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of problem solving. *Cognition and Instruction*, *5*, 49-101.

Shierpinscka, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Rutnisky, A., Etheredge, S., Freeman, S., & Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-Writing Approach. *Journal for Research in Mathematics Education, 26***,** 467-485.