ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ

Ελένη Παπαγεωργίου, edelpa@ucy.ac.cy
Κωνσταντίνος Χρίστου
Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Λευκωσία 1678, Τ.Κ. 20537

Λέξεις Κλειδιά: προβλήματα αναλογίας, στρατηγικές λύσης προβλήματος, προβλήματα μείγματος.
Κατηγορία: Εμπειρική.

Περίληψη

Στη μελέτη αυτή εξετάσαμε το βαθμό κατανόησης της έννοιας της αναλογίας από τους μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν στη λύση προβλημάτων αναλογίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές ανάλογα με τη δομή και τους αριθμούς του προβλήματος. Σε μεγαλύτερη συχνότητα φαίνεται πώς χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, προφανώς ως αποτέλεσμα των προηγούμενων εμπειριών τους με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Τέλος, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές δεν έχουν ολοκληρωμένη αντίληψη όλων των σχέσεων που διέπουν μια αναλογική σχέση, αφού στη λύση προβλημάτων εφαρμόζουν πολλές φορές στρατηγικές που σχετίζονται με τις ποσοτικές διαφορές των όρων που βρίσκονται στους λόγους της αναλογίας.

Abstract

The main purpose of this study was to view students' understanding of proportion, and to investigate the strategies they use in solving proportional problems. This work suggests that students' strategies were closely related to the semantic structure of the problems. The within and between structure of the problems elicited different strategies. Between problems were consistently solved with the "unit rate method", indicating an attempt to transfer the knowledge resulted by students' experience with solving simple multplication and division problems. The solution of within problems was mainly affected by the complexity of the numbers involved in the two ratios. Very few students recognized the inherent scalar or functional relationships to produce creative solutions to problems.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ

Εισαγωγή και Στόχος της έρευνας

Ο λόγος και η αναλογία αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες του αναλυτικού προγράμματος, γιατί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Confrey & Smith, 1995). Πρωτοεμφανίζονται σε λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου και στη συνέχεια αναπτύσσονται σταδιακά σε καταστάσεις που περιλαμβάνουν ισοδυναμία ή σύγκριση κλασμάτων, για να καταλήξουν ως βασικές γνώσεις ανάπτυξης των αλγεβρικών σχέσεων, της τριγωνομετρίας και της θεωρίας πιθανοτήτων.

Λόγω της σπουδαιότητας της έννοιας της αναλογίας στα σχολικά μαθηματικά, πολλοί ερευνητές επικεντρώθηκαν στους παράγοντες που προκαλούν τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών και στους παράγοντες που επηρεάζουν την επιλογή των στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας (Spinillo & Bryant, 1991 Kaput & West, 1994 Tourniaire & Pulos, 1985·Nesher & Sukenik, 1991). Έχει διαπιστωθεί ότι η δομή ενός προβλήματος είναι ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν στις δυσκολίες των μαθητών (Kaput & West, 1994 Lamon, 1994), ενώ το πλαίσιο του προβλήματος ασκεί καθοριστική επίδραση στην επιλογή της στρατηγικής που χρησιμοποιείται από τους μαθητές στη λύση του (Schliemann & Pereira, 1990 Singer & Resnick, 1992).

Στην παρούσα εργασία επικεντρωθήκαμε στο βαθμό κατανόησης της έννοιας της αναλογίας και στο είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου για να λύσουν προβλήματα αναλογίας. Εστιάσαμε ιδιαίτερα το ενδιαφέρον μας στην επιλογή των στρατηγικών λύσης προβλημάτων αναλογίας με διαφορετική δομή. Συγκεκριμένα, τα βασικά ερωτήματα της μελέτης αυτής είναι:

α) Σε ποιο βαθμό κατανοούν οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου την έννοια της αναλογίας και ποιες διαφοροποιήσεις παρατηρούνται στο βαθμό κατανόησης προβλημάτων διαφορετικής δομής ανάλογα με την τάξη των μαθητών.

β) Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν λύνουν διάφορους τύπους προβλημάτων αναλογίας και ποιες διαφοροποιήσεις υπάρχουν ανάλογα με την τάξη.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Στρατηγικές επίλυσης

Η αναλογία είναι μια σχέση δεύτερης τάξης, η οποία περιλαμβάνει μια ισοδύναμη τάξη μεταξύ δύο λόγων, ενώ ο λόγος ορίζεται ως η αριθμητική σχέση πρώτης τάξης μεταξύ δύο ποσοτήτων. Η κατανόηση των αναλογικών σχέσεων υποδηλώνει μια διαδικασία ένωσης τεσσάρων στοιχείων, γιατί μια αναλογία περιλαμβάνει δύο λόγους, ο καθένας από τους οποίους περιέχει δύο στοιχεία τα οποία πρέπει να συγκριθούν. Το είδος των στρατηγικών λύσης προβλημάτων

αναλογίας εξαρτάται από το είδος των σχέσεων που είναι δυνατό να υπάρχουν ανάμεσα στα τέσσερα στοιχεία μιας αναλογίας. Ανάλογα με τον τρόπο που οι μαθητές καθορίζουν τις σχέσεις διακρίνουμε τις σχέσεις «εντός», δηλαδή σχέσεις ποσοτήτων του ίδιου είδους, και τις σχέσεις «εκτός», δηλαδή σχέσεις αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους (Kaput & West, 1994 Lamon, 1994). Για παράδειγμα, στο πρόβλημα «αν τρία βιβλία στοιχίζουν 9 λίρες, πόσο θα στοιχίζουν 12 βιβλία;» υπάρχουν δύο μετρικοί χώροι, ο χώρος με τα δύο σύνολα των βιβλίων και ο χώρος με τα δύο σύνολα των χρημάτων. Οι σχέσεις «εντός» στο συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρονται στη σύγκριση του αριθμού των βιβλίων με τον αριθμό των βιβλίων και του αριθμού των χρημάτων με τον αριθμό των χρημάτων. Επομένως, σχηματίζονται οι λόγοι 3/12 και 9/x. Αντίθετα, οι σχέσεις «εκτός» αναφέρονται στη σύγκριση του αριθμού των βιβλίων προς τον αντίστοιχο αριθμό των χρημάτων με αποτέλεσμα το σχηματισμό των λόγων 3/9 και 12/x.

Η διάκριση σχέσεων «εντός» και «εκτός» πηγάζει βασικά από τη διαφοροποίηση της γνωστικής διαδικασίας που απαιτείται για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Συγκεκριμένα, η σχέση «εντός» περιλαμβάνει αφομοίωση ποσοτήτων του ίδιου είδους και μεταβολή της μιας εκ των δύο ποσοτήτων στο συγκεκριμένο είδος. Αντίθετα, η σχέση «εκτός» αναφέρεται στη σχέση που συνδέει ποσότητες διαφορετικού είδους με αποτέλεσμα την οικοδόμηση μιας νέας έννοιας (Noelting, 1980).

Η εφαρμογή καθεμιάς από τις πιο πάνω διαδικασίες καθορίζει και το είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη λύση προβλημάτων αναλογίας (Lamon, 1994). Στις «εντός» στρατηγικές γίνονται δύο συγκρίσεις πρώτης τάξης, ανάμεσα στα δύο σύνολα που ανήκουν στον ίδιο μετρικό χώρο. Η σωστή εφαρμογή μιας «εντός» στρατηγικής βασίζεται στο ότι οι τελεστές που συνδέουν τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων στους δύο διαφορετικούς μετρικούς χώρους είναι οι ίδιοι. Στις «εκτός» στρατηγικές οι δύο συγκρίσεις πρώτης τάξης γίνονται σε αντίστοιχα σύνολα διαφορετικού μετρικού χώρου, ενώ η σωστή εφαρμογή τους στηρίζεται στο βαθμό κατανόησης της συναρτησιακής σχέσης που υπάρχει μεταξύ των δύο μετρικών χώρων.

Σύμφωνα με τους Karplus, Pulos και Stage (1983), η «εντός» στρατηγική χρησιμοποιείται συχνότερα από την «εκτός» από μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Η εφαρμογή όμως της καθεμιάς εξαρτάται άμεσα από παράγοντες που σχετίζονται με τον τύπο του προβλήματος και με τις σχέσεις που διέπουν τα αριθμητικά του δεδομένα (Kaput & West, 1994 Lamon, 1994).

Πολλές στρατηγικές και διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας ανακαλύπτονται από τους ίδιους τους μαθητές και χρησιμοποιούνται άτυπα πριν από τη διδασκαλία. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στις αναπαραστάσεις που έχουν οι μαθητές για τη συγκεκριμένη έννοια και δηλώνει ότι οι μαθητές μπορούν να εφαρμόζουν άτυπα ένα σύστημα γνώσεων, εντελώς διαισθητικά (Streefland, 1984). Η ανακάλυψη στρατηγικών λύσης βασίζεται στην κατανόηση της πολλαπλασιαστικής δομής της αναλογίας και αποτελούν ουσιαστικά μια άτυπη μορφή των «εντός» και των «εκτός» σχέσεων. Αν και οι στρατηγικές αυτές είναι επαρκείς για την εύρεση της απάντησης ενός προβλήματος, δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αλγεβρικές, γιατί δεν ακολουθείται μια συντακτικά οργανωμένη διαδικασία πράξεων στις εξισώσεις που τις περιγράφουν (Nesher & Sukenik, 1991· Kaput & West, 1994).

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τρεις βασικές αλληλοσυσχετιζόμενες μορφές άτυπων στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προβλήματα αναλογικής σκέψης: της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης, της σύντομης μορφής επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης και της αναγωγής στη μονάδα (Kaput & West, 1994). Η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση περιέχει αρχικά αναγνώριση και διάκριση των δύο μετρικών χώρων και των αντίστοιχων συνόλων. Η διαδικασία που ακολουθείται στην εφαρμογή της στρατηγικής αυτής, απαιτεί μια επαναλαμβανόμενη δυαδική πράξη πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Η σύντομη μορφή επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης διαφοροποιείται από την απλή επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση από την αριθμητική πράξη που υπονοείται. Συγκεκριμένα, οι επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή αφαιρέσεις αντικαθιστώνται με την πράξη του συμπληρωματικού πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης. Για παράδειγμα, στο προηγούμενο πρόβλημα θα βρούμε πόσες τριάδες βιβλίων χρειάζονται για να φτιάξουμε ένα σύνολο από 12 βιβλία. Στη συνέχεια θα βρούμε πόσο στοιχίζουν όλες οι τριάδες των βιβλίων, δεδομένου ότι γνωρίζουμε πόσο στοιχίζει μια τριάδα. Η πράξη της διαίρεσης στην εφαρμογή της συγκεκριμένης στρατηγικής έχει την έννοια της ομαδοποίησης. Η επιλογή μιας τέτοιας διαδικασίας είναι αποτέλεσμα περισσότερων εμπειριών των μαθητών, ή μπορεί να πηγάζει εξ ανάγκης, όταν οι αριθμοί είναι μεγάλοι (Kaput & West, 1994). Σύμφωνα με τους Kaput και West (1994), οι στρατηγικές αυτές είναι πιο αποδοτικές σε περιπτώσεις που γίνεται χρήση γνωστών λόγων όπως το ½.

Η αναγωγή στη μονάδα θεωρείται από τους Nesher και Sukenik (1991) πιο αποδοτική μέθοδος, γιατί περικλείει την εννοιολογική κατανόηση του λόγου. Η μέθοδος αυτή φαίνεται να χρησιμοποιείται αυθόρμητα από τους μαθητές και ίσως να οφείλεται σε προηγούμενες εμπειρίες τους, οι οποίες πηγάζουν από τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Kaput & West, 1994). Ουσιαστικά η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα βασίζεται στις διαδικασίες επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης με τη διαφορά ότι η διαίρεση στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει την έννοια του μερισμού αντί της ομαδοποίησης. Για να βρούμε τη λύση στο πιο πάνω πρόβλημα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα βρίσκουμε πόσο στοιχίζει το ένα βιβλίο (£9÷3) και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το ποσό αυτό με το συνολικό αριθμό των βιβλίων, για να βρούμε πόσο στοιχίζουν όλα τα βιβλία (£3X12).

Η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα θεωρείται ως στρατηγική ανώτερου επιπέδου αφού απαιτεί την κατανόηση της έννοιας του λόγου, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους (Kaput & West, 1994). Η εφαρμογή της αναγωγής στη μονάδα προϋποθέτει την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που υπάρχουν σε όρους που αναφέρονται στο ίδιο είδος μεταβλητής ή σε αντίστοιχους όρους των δύο διαφορετικών μεταβλητών σε ένα πρόβλημα

αναλογίας (Nesher & Sukenik, 1991). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μέθοδος αυτή αποτελεί τη βάση για τη διδασκαλία των πιο τυποποιημένων αλγορίθμων επίλυσης αναλογιών (Kaput & West, 1994).

Δυσκολίες των μαθητών στη λύση προβλημάτων αναλογίας

Πέρα από την αναγνώριση των σωστών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη λύση προβλημάτων αναλογίας, πολλοί ερευνητές επικεντρώθηκαν στον καθορισμό των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα προβλήματα αναλογίας και των παραγόντων που προκαλούν αυτές τις δυσκολίες οι οποίοι οδηγούν στην εφαρμογή λανθασμένων στρατηγικών (Spinillo & Bryant, 1991· Kaput & West, 1994· Tourniaire & Pulos, 1985· Nesher & Sukenik, 1996). Πολλοί από τους παράγοντες αυτούς σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας της αναλογίας ως πολλαπλασιαστικής σχέσης. Από τα συμπεράσματα των πιο πάνω ερευνών διακρίνουμε τρεις κατηγορίες δυσκολιών που σχετίζονται με τις παρανοήσεις στην κατανόηση της δομής της έννοιας της αναλογίας. Η πρώτη κατηγορία δυσκολιών αναφέρεται στην αναγνώριση της έννοιας ως ποιοτικής σχέσης μεταξύ των συνισταμένων της με αποτέλεσμα οι μαθητές να περιθωριοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα και να χρησιμοποιούν διαισθητικά φράσεις του τύπου «περισσότερο» ή «λιγότερο» (Noelting, 1980a· Nesher & Sukenik, 1991).

Η δεύτερη κατηγορία δυσκολιών πηγάζει από την αναγνώριση της έννοιας της αναλογίας ως μερικώς ποσοτικής σχέσης. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται στην έλλειψη ικανότητας αντίληψης όλων των στοιχείων της αναλογίας και της διάταξής τους, με αποτέλεσμα τη χρήση μόνο μέρους των πληροφοριών. Οι μαθητές σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουν στρατηγικές επικέντρωσης αφού συγκεντρώσουν την προσοχή τους σε μερικές ποσοτικές, κυρίως, σχέσεις (Nesher & Sukenik, 1991).

Η τρίτη κατηγορία δυσκολιών οφείλεται στην αναγνώριση μιας επαρκούς ποσοτικής προσθετικής σχέσης στη δομή της αναλογίας. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν αυτή τη στρατηγική είναι ικανοί να διακρίνουν όλες τις ποσότητες, να κατασκευάσουν μονάδες και να καθορίσουν την άγνωστη ποσότητα, αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν ότι οι ποσότητες αυτές σχετίζονται πολλαπλασιαστικά, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν προσθετική στρατηγική στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας, βρίσκοντας ποσοτικές διαφορές ανάμεσα στα αριθμητικά δεδομένα (Kaput & West, 1994· Nesher & Sukenik, 1991). Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής γίνεται διαισθητικά και βασίζεται σε εμπειρίες προσθετικών διαφορών (Hart,1984).

Η ποσοτική αντίληψη των λόγων που συνιστούν μια αναλογία θεωρείται επαρκής για την κατανόηση της έννοιας μόνο όταν αυτή η σχέση θεωρηθεί πολλαπλασιαστική (Nesher & Sukenik, 1991). Παρ΄ όλα αυτά, η πολλαπλασιαστικότητα που διέπει μια αναλογική σχέση προκαλεί διαφορετικού τύπου δυσκολίες που πηγάζουν από το βαθμό κατανόησης των σχέσεων πρώτης και δεύτερης τάξης που περικλείονται σε μια αναλογία (Spinillo & Bryant, 1991). Όταν ο βαθμός πολυπλοκότητας των σχέσεων πρώτης τάξης αυξάνει οι μαθητές φαίνεται να αναγνωρίζουν και να χειρίζονται σωστά μόνο λόγους που τους είναι γνωστοί και κατανοητοί (Spinillo & Bryant, 1991). Η σωστή εφαρμογή οποιασδήποτε πολλαπλασιαστικής στρατηγικής απαιτεί την πλήρη κατανόηση της έννοιας της αναλογίας ως σχέσης δεύτερης τάξης. Έτσι, ενώ οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν μεμονωμένα τις σχέσεις σε κάθε λόγο, αδυνατούν να συγκρίνουν τους λόγους μεταξύ τους (Spinillo & Bryant, 1991).

Σύμφωνα με το Δημητρίου (1993), η πλήρης κατανόηση της πολλαπλασιαστικής δομής της αναλογίας δεν ολοκληρώνεται πριν από την ηλικία των 14-15 χρόνων, γιατί μόνο σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν πολύπλοκες αριθμητικές σχέσεις. Στην ηλικία των 11-12 χρόνων η αναλογική σκέψη εμφανίζεται αρχικά ως η ικανότητα διαισθητικής αντίληψης των αναλογικών σχέσεων, ιδιαίτερα σε προβλήματα στα οποία υπάρχουν ισοδύναμες τάξεις ανάμεσα στους όρους τους, όπως για παράδειγμα 2/4 και 4/8.

Για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου «η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας είναι σχετικά εύθραυστη και επηρεάζεται εύκολα από τις δομικές μεταβολές του προβλήματος» (Lawton, 1993, σελ.460). Για το λόγο αυτό, παρατηρούμε τον ίδιο μαθητή να χρησιμοποιεί διαφορετικές σωστές στρατηγικές σε προβλήματα αναλογίας που διαφοροποιούνται ανάλογα με τη δομή τους ή να ανατρέχει σε πρωταρχικά μοντέλα που οδηγούν σε λανθασμένες λύσεις, λόγω του βαθμού δυσκολίας που παρουσιάζονται στις σχέσεις των λόγων.

Μεθοδολογία

Δείγμα και Διαδικασία

Στην έρευνα αυτή έλαβαν μέρος συνολικά 202 παιδιά, 117 παιδιά της Ε΄ τάξης και 85 παιδιά της Στ΄ τάξης δημοτικών σχολείων της πόλης και επαρχίας Λευκωσίας και της ελεύθερης Αμμοχώστου.

Για τη διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιήθηκε μέρος των δεδομένων που έχουν συλλεχθεί για τους σκοπούς ενός ευρύτερου ερευνητικού έργου. Στους μαθητές παραχωρήθηκαν 80 λεπτά για να απαντήσουν σε προβλήματα αναλογίας, μεταξύ των οποίων υπήρχαν 8 προβλήματα σύγκρισης μείγματος στα οποία γίνεται αναφορά στη μελέτη αυτή. Οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή απάντηση σε κάθε πρόβλημα και να επεξηγήσουν τον τρόπο που χρησιμοποίησαν για τη λύση του. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 μονάδα. Οι επεξηγήσεις κωδικοποιήθηκαν και στη συνέχεια ομαδοποιήθηκαν ανάλογα με τις στρατηγικές που αναφέρθηκαν.

Προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα

Τα προβλήματα σύγκρισης μείγματος δόθηκαν στους μαθητές σε εικονική μορφή (Παράρτημα 1). Οι μαθητές σε κάθε πρόβλημα είχαν να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο δοχεία εκείνο που θα είχε το πιο έντονο κόκκινο χρώμα, αν αναμειγνύαμε διαφορετικό αριθμό ποτηριών κόκκινου και άσπρου χρώματος.

Τα προβλήματα που δόθηκαν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τις σχέσεις των όρων τους. Τα προβλήματα 1, 2 και 3 περιλαμβάνουν ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις «εντός» και «εκτός». Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 1 μπορούν να σχηματιστούν οι λόγοι 2/4 και 1/3 (σχέσεις «εντός») ή οι λόγοι 2/1 και 4/3 (σχέσεις «εκτός»). Τα προβλήματα 4 και 5 περιλαμβάνουν ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις «εκτός», ενώ τα προβλήματα 6, 7 και 8 δεν περιέχουν ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα στους όρους τους. Οι μαθητές, για να βρουν την απάντηση σε κάθε πρόβλημα έπρεπε να συγκρίνουν τους λόγους που προκύπτουν από τα αριθμητικά δεδομένα χρησιμοποιώντας ακέραιες «εντός» και «εκτός» σχέσεις ή άλλες αλγοριθμικές διαδικασίες.

Αποτελέσματα

Η συζήτηση των αποτελεσμάτων γίνεται με βάση τα ερωτήματα της μελέτης. Για αυτό εξετάζεται πρώτα ο βαθμός κατανόησης των προβλημάτων αναλογίας και στη συνέχεια οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη λύση τους.

Βαθμός κατανόησης

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, τα προβλήματα σύγκρισης μείγματος χωρίζονται στις κατηγορίες «εντός» και «εκτός» (Πρόβλημα 1, Πρόβλημα 2, Πρόβλημα 3), «εκτός» (Πρόβλημα 4, Πρόβλημα 5) και στην κατηγορία προβλημάτων χωρίς ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις στα δεδομένα τους (Πρόβλημα 6, Πρόβλημα 7, Πρόβλημα 8). Οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου φαίνεται ότι δεν κατανοούν σε μεγάλο βαθμό την έννοια της αναλογίας, αφού η μέση επίδοσή τους στο σύνολο των προβλημάτων είναι σχετικά χαμηλή ($M_{E'}$=3,52, $SD_{E'}$=2,53, $M_{\Sigma\tau'}$=3,85, $SD_{\Sigma\tau'}$=2,50).

Παρ' όλο που η διδασκαλία της έννοιας της αναλογίας περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα της Στ΄ τάξης, εντούτοις η μέση επίδοση των μαθητών της Ε΄ και της Στ΄ τάξης στο σύνολο των προβλημάτων δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($t_{(200)}$=-0,914, p=0,362). Παρατηρήθηκαν όμως διαφοροποιήσεις στη μέση επίδοση των μαθητών των δύο τάξεων ανάλογα με τις κατηγορίες προβλημάτων ($F_{3,201}$=2,801, p=0,041). Η μέση επίδοση των μαθητών της Στ΄ τάξης στα προβλήματα με ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις «εκτός» (Πρόβλημα 4, Πρόβλημα 5) είναι μεγαλύτερη από τη μέση επίδοση των μαθητών της Ε΄ τάξης ($F_{1,201}$=6,655, p=0,011) (Πίνακας 1).

	Προβλήματα με «Εντός» και «Εκτός» Σχέσεις				Προβλήματα με «Εκτός» Σχέσεις				Προβλήματα Χωρίς Ακέραιες Πολ/στικές Σχέσεις			
Τάξη	M	SD	$F_{1,201}$	p	M	SD	$F_{1,201}$	p	M	SD	$F_{1,201}$	p
Ε΄	1,50	1,01	0,028		0,80	0,84	6,655		1,23	1,15	0,061	
Στ΄	1,47	1,12			1,11	0,86			1,27	1,12		

Πίνακας 1: Μέση Επίδοση σε Κάθε Κατηγορία Προβλημάτων Αναλογίας

Στρατηγικές λύσης προβλημάτων αναλογίας

Ο δεύτερος στόχος της έρευνας ήταν ο καθορισμός των στρατηγικών λύσης των προβλημάτων κάθε κατηγορίας. Ύστερα από κατάλληλη κωδικοποίηση διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικές στρατηγικές, στρατηγική επικέντρωσης και προσθετική στρατηγική σε όλα τα προβλήματα και των τριών κατηγοριών (Πίνακας 2). Οι πολλαπλασιαστικές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και των δύο τάξεων περιλαμβάνουν τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα και τη μέθοδο του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου (ΕΚΠ), που είναι βασικά ο αλγόριθμος που διδάσκεται στα σχολεία για τη σύγκριση κλασμάτων. Επιπλέον οι μαθητές της Ε΄ τάξης εφάρμοσαν την επαναληπτική πρόσθεση στα προβλήματα 1 και 3, ενώ ένα μικρό ποσοστό μαθητών της Στ΄ τάξης εφάρμοσε σε όλα τα προβλήματα τη στρατηγική σύγκρισης ποσοστών. Οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης χρησιμοποίησαν σε σχετικά μεγάλο βαθμό λανθασμένες στρατηγικές όπως την προσθετική στρατηγική και τη στρατηγική επικέντρωσης σε όλα τα προβλήματα, ίσως γιατί η δομή της έννοιας της αναλογίας ως πολλαπλασιαστική σχέση δεν γίνεται αντιληπτή από πολλούς μαθητές της ηλικίας αυτής.

Η συνολική συχνότητα εφαρμογής των πολλαπλασιαστικών στρατηγικών από τους μαθητές των δύο τάξεων διαφοροποιείται ανάλογα με το πρόβλημα και ίσως να οφείλεται στη δομή και στα δεδομένα του προβλήματος (Πίνακας 2). Στους μαθητές της Ε΄ τάξης η μικρότερη συχνότητα πολλαπλασιαστικών στρατηγικών παρατηρήθηκε στο πρόβλημα 3 και η μεγαλύτερη στο πρόβλημα 7, ενώ στους μαθητές της Στ΄ τάξης η μικρότερη συχνότητα εφαρμογής των στρατηγικών αυτών παρατηρήθηκε στο πρόβλημα 6 και η μεγαλύτερη στο πρόβλημα 3. Οι διαφοροποιήσεις αυτές ενισχύουν την άποψη ότι τα δεδομένα του προβλήματος είναι ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν στις δυσκολίες κατανόησης της έννοιας της αναλογίας ως πολλαπλασιαστικής σχέσης δεύτερης τάξης.

Πρόβλημα	Τάξη	Επικέντρωσης%	Προσθετική %	Στρατηγικές Πολλαπλασιαστικές %				Σύνολο Πολ/στικών Στρατηγικών %
				Αναγωγή στη Μονάδα	ΕΚΠ	Επαναλ. Πρόσθεση	Ποσοστό	
1	Ε΄	18	22	27	27	7		61
	Στ΄	25	11	22	39		3	64
2	Ε΄	34	7	31	26			57
	Στ΄	15	21	21	41		3	65
3	Ε΄	32	18	28	18	4		50
	Στ΄	17	11	31	37		3	71
4	Ε΄	19	19	36	26			62
	Στ΄	31	7	29	31		2	62
5	Ε΄	14	25	33	28			61
	Στ΄	26	13	21	37		3	61
6	Ε΄	36	5	31	28			59
	Στ΄	27	12	15	42		3	60
7	Ε΄	10	20	37	33			70
	Στ΄	23	10	20	43		3	66
8	Ε΄	35	10	25	30			55
	Στ΄	21	12	17	46		4	67

Πίνακας 2: Συχνότητα Επιτυχημένης Εφαρμογής Κάθε Στρατηγικής

Οι τιμές αναφέρονται στο ποσοστό εφαρμογής κάθε στρατηγικής όταν αυτή οδηγούσε σε ορθή απάντηση.

Από τον Πίνακα 2 φαίνεται επίσης ότι οι μαθητές της Στ΄ τάξης εφαρμόζουν περισσότερο τη μέθοδο του ΕΚΠ από τους μαθητές της Ε΄ τάξης, ενώ οι μαθητές της Ε΄ τάξης εφαρμόζουν περισσότερο τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, πιθανόν γιατί εφαρμόζουν το μοντέλο λύσης που έχουν διδαχθεί για τη λύση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Στα προβλήματα με ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις «εκτός», η σημαντική διαφορά που παρατηρήθηκε στη μέση συνολική επίδοση των μαθητών της Ε΄ και της Στ΄ τάξης οφείλεται κυρίως στη σημαντική διαφορά της επίδοσης των μαθητών στο πρόβλημα 4 ($M_{E'}$=0,3761, $M_{\Sigma\tau'}$=0,5529, $F_{1,201}$=6,356, p=0,012). Αναφορικά με τις στρατηγικές που εφαρμόστηκαν στα προβλήματα της κατηγορίας αυτής (Πρόβλημα 4, Πρόβλημα 5), παρατηρούμε ότι οι μαθητές της Στ΄ τάξης εφάρμοσαν συχνότερα τη μέθοδο του ΕΚΠ και τη στρατηγική της επικέντρωσης, ενώ αντίθετα οι μαθητές της Ε΄ τάξης εφάρμοσαν περισσότερο την αναγωγή στη μονάδα και την προσθετική στρατηγική.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή έγινε προσπάθεια να αναγνωριστούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν πρόκειται να επιλύσουν προβλήματα αναλογίας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου δεν έχουν ολοκληρωμένη αντίληψη των σχέσεων που διέπουν μια αναλογία, αφού στη λύση προβλημάτων εφαρμόζουν πολλές φορές στρατηγικές που δεν σχετίζονται με πολλαπλασιαστικές δομές (Hart, 1984· Nesher & Sukenik, 1991). Αρκετοί μαθητές, για παράδειγμα, επικεντρώθηκαν στα αριθμητικά δεδομένα του ενός μόνο μετρικού χώρου και έκαναν συγκρίσεις ανάμεσα στους όρους, δείχνοντας έτσι ότι έχουν κατανοήσει την έννοια ως μερικώς ποσοτική. Άλλοι μαθητές εφάρμοσαν προσθετική στρατηγική, βρίσκοντας όλες τις ποσοτικές διαφορές ανάμεσα στους όρους των δύο μετρικών χώρων. Από τα πιο πάνω φαίνεται ότι οι μαθητές αυτοί δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της αναλογίας ως πολλαπλασιαστική σχέση, για αυτό εφαρμόζουν διαισθητικά κάποιες στρατηγικές σχετικές με τις εμπειρίες τους σε προσθετικές διαφορές (Hart, 1984· Nesher & Sukenik, 1991).

Παρ΄ όλα αυτά, ένας ικανοποιητικός αριθμός μαθητών αυτής της ηλικίας έδειξαν ότι είναι ικανοί να αντιληφθούν την πολλαπλασιαστικότητα που περικλείεται σε μια αναλογική σχέση σε βαθμό που να τους καθιστά ευέλικτους να εφαρμόζουν εναλλακτικούς τρόπους στην επίλυση προβλημάτων (Δημητρίου, 1993· Streefland, 1984). Συγκεκριμένα, οι στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές που κατανοούν την πολλαπλασιαστική δομή μιας αναλογίας δείχνουν ότι οι μαθητές αυτοί έχουν την ικανότητα να προσαρμόζουν κατάλληλα προηγούμενες σχετικές γνώσεις, όπως τις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, σε τυπικά άγνωστες καταστάσεις (Streefland, 1984).

Οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης χρησιμοποίησαν σε μεγάλο βαθμό τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα και τον αλγόριθμο του ΕΚΠ. Η χρησιμοποίηση της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα αντανακλά το βαθμό κατανόησης των σχέσεων πρώτης τάξης που περιέχονται στους λόγους μιας αναλογίας. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή, οι μαθητές φαίνεται να γνωρίζουν ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει από ένα λόγο είναι μια έννοια που οικοδομείται από τη σχέση δύο διαφορετικών ειδών, ή δύο διαφορετικών ποσοτήτων του ίδιου είδους. Παράλληλα, η εφαρμογή της μεθόδου της αναγωγής στη μονάδα από μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της αναλογίας, δείχνει την ικανότητα μεταφοράς των γνώσεων, που οι μαθητές απέκτησαν προηγουμένως από την ενασχόλησή τους με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, στη λύση προβλημάτων αναλογίας (Kaput & West, 1994). Το γεγονός ότι οι μαθητές της Ε΄ τάξης δεν

έχουν διδαχθεί κανένα είδος τυπικού μοντέλου αναλογίας, αυτό ενισχύει την άποψη ότι η επιλογή κάποιων άτυπων στρατηγικών όπως η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα, εφαρμόζεται διαισθητικά (Hart, 1984). Η συχνότερη χρησιμοποίηση της μεθόδου της αναγωγής στη μονάδα από τους μαθητές της Στ΄ τάξης στα προβλήματα με ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις δηλώνει ότι τα πρωταρχικά μοντέλα που έχουν οι μαθητές της Στ΄ τάξης για την έννοια της αναλογίας επηρεάζουν την επιλογή της στρατηγικής τους ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος (Streefland, 1984· Kaput & West, 1994).

Η εφαρμογή της μεθόδου του ΕΚΠ, παρόλο που βασίζεται στη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, εντούτοις είναι μια τυπική αλγοριθμική διαδικασία, η οποία έχει διπλό χαρακτήρα. Από μια άποψη αντανακλά το βαθμό κατανόησης της ομοιογένειας όταν οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τους δύο λόγους σε μια αναλογία. Από την άλλη όμως, είναι πιθανόν να παραμερίζεται η έννοια της ομοιογένειας και οι λόγοι που προκύπτουν από τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος να αντιμετωπίζονται ως ετερώνυμα κλάσματα, τα οποία θα συγκριθούν. Η συχνότερη χρήση της μεθόδου του ΕΚΠ από τους μαθητές της Στ' τάξης δείχνει την επίδραση της εξάσκησης του τυπικού αλγορίθμου ισοδυναμίας κλασμάτων στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας (Kaput & West, 1994).

Η επιλογή της στρατηγικής για τη λύση ενός προβλήματος αναλογίας φαίνεται ότι επηρεάζεται από τη δομή του προβλήματος, αφού οι μαθητές και των δύο τάξεων εφάρμοσαν περισσότερο τη μέθοδο του ΕΚΠ στα προβλήματα που δεν περιέχουν ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις στους όρους τους. Επιπλέον, οι μαθητές της Ε΄ τάξης εφάρμοσαν τη μέθοδο της επαναληπτικής πρόσθεσης στις περιπτώσεις όπου η σχέση απαιτούσε μόνο ένα διπλασιασμό για την εύρεση ισοδύναμης τάξης κάθε λόγου. Γενικά, φαίνεται ότι η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση κάθε προβλήματος αποτελεί ένδειξη της συσχέτισης της επιλογής της με το είδος των σχέσεων των δεδομένων του προβλήματος (Lamon, 1994).

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω, φαίνεται ότι η άποψη που έχουν οι μαθητές για την έννοια της αναλογίας βασίζεται περισσότερο στις παραστάσεις που έχουν για την έννοια παρά στο τυπικό μοντέλο της. Οι στρατηγικές που έδειξαν να χρησιμοποιούν φανερώνουν την ικανότητά τους να συσχετίζουν την έννοια της αναλογίας με άλλες σχετικές έννοιες που περιλαμβάνονται στο εννοιολογικό πολλαπλασιαστικό πεδίο (Lo & Watanabe, 1997). Αυτό είναι ένδειξη προβληματισμού για την επέκταση του βαθμού της διδασκαλίας της έννοιας και της αναγνώρισής της σε διάφορες καταστάσεις.

Αναφορές

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Δημητρίου, Α. (1993). *Γνωστική Ανάπτυξη- Μοντέλα- Μέθοδοι-Εφαρμογές. Τόμος 1*. Θεσσαλονίκη:Art of text.

Hart, K. M. (1984). *Ratios: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: The NFER-Nelson Publishing Company.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (σελ.235-287). Albany, NY:State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Early adolescent's proportional reasoning on rate problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 219-234.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (σελ. 89-119). Albany, NY:State University of New York Press.

Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *244*(5), 460-466.

Lo, J.J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: a story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 216-236.

Nesher, P., & Sukenik, M. (1991). The effect of formal representation on the learning of ratio concepts. *Learning and Instruction, 1*, 161-175.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 217-253.

Schliemann, D., & Pereira, V. (1990). Proportional reasoning: From shopping to kitchens, laboratories and hopefully schools. *Proceedings of the Fourteenth PME Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Singer, J. A., & Resnick, L. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners?. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 231-246.

Sowder, J. T., (1998). Perspectives From Mathematics Education. *Educational Researcher, 27*(5), 12-13.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: the importance of "half". *Child Development, 62*, 427-440.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part 1: Reflections on the teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 327-348.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

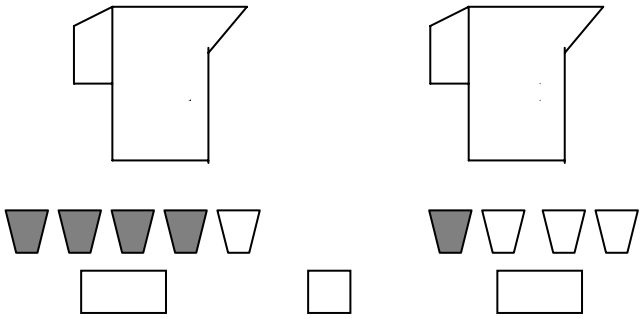
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Προβλήματα σύγκρισης μείγματος

Τα προβλήματα σύγκρισης μείγματος δόθηκαν σε εικονική μορφή, όπως το παράδειγμα:

Τα προβλήματα που ακολουθούν αναφέρονται σε ανάμειξη κόκκινης μπογιάς με άσπρη μπογιά. Σε κάθε σχήμα υπάρχουν δύο δοχεία, το δοχείο Α και το δοχείο Β. Μέσα σε κάθε δοχείο αναμειγνύουμε την κόκκινη μπογιά με την άσπρη μπογιά που βρίσκεται στα ποτήρια. Το χρώμα του μείγματος κάθε δοχείου εξαρτάται από την αναλογία κόκκινης και άσπρης μπογιάς.

Στα κουτιά κάτω από τα ποτήρια σημείωσε το δοχείο που νομίζεις ότι έχει το πιο κόκκινο χρώμα. Αν νομίζεις ότι το χρώμα στα δύο δοχεία είναι το ίδιο, σημείωσε √ στο τετράγωνο που είναι στο μέσο. Στη συνέχεια εξήγησε γιατί επέλεξες εκείνο το δοχείο.



Εξήγηση:

Τα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές περιγράφονται από τα πιο κάτω διατεταγμένα ζεύγη:

Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4
A:(2,1), B:(4,3)	A:(1,3), B:(2,5)	A:(2,3), B:(1,2)	A:(6,3), B:(5,2)
Πρόβλημα 5	Πρόβλημα 6	Πρόβλημα 7	Πρόβλημα 8
A:(4,2), B:(5,3)	A:(2,3), B:(3,4)	A:(5,2), B:(7,3)	A:(3,5), B:(5,8)

Το κάθε διατεταγμένο ζεύγος παριστάνει το μείγμα που θα περιέχει κάθε δοχείο όταν αναμειχθούν οι συγκεκριμένες ποσότητες ποτηριών διαφορετικού χρώματος μπογιάς που αντιστοιχούν στους όρους του. Ο πρώτος όρος κάθε διατεταγμένου ζεύγους αναφέρεται στον αριθμό των ποτηριών κόκκινου χρώματος, ενώ ο δεύτερος όρος αναφέρεται στον αριθμό των ποτηριών άσπρου χρώματος.