Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ «ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΩΝ» ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

Αθανάσιος Γαγάτσης, Αναπλ. Καθηγητής
Ανδρέας Δημητρίου, Καθηγητής
Θέκλα Αφαντίτη, Ελένη Μιχαηλίδου, Αρετή Παναούρα, Μύρια Σιακαλλή & Μιχάλης Χριστοφορίδης
(μεταπτυχιακοί φοιτητές)
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τ.Θ. 20537, Λευκωσία 1678
Υπεύθυνος επικοινωνίας: Αθανάσιος Γαγάτσης, gagatsis@ucy.ac.cy

Λέξεις κλειδιά: αναπαραστάσεις, λύση προβλήματος, Δημοτικό Σχολείο.
Επίπεδο Εκπαίδευσης: Δημοτικό Σχολείο.
Κατηγορία: Εμπειρική-Ερευνητική.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη της επίδρασης της χρήσης διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων - αριθμητικών, λεκτικών, εικονικών - στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης από παιδιά Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης του δημοτικού. Εξετάσαμε κατά πόσο υπάρχει ένας κώδικας αναπαράστασης ή ένας συνδυασμός κωδίκων που ευνοεί την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και πώς διαφοροποιείται η επίδραση των κωδίκων σε σχέση με την ηλικία. Δώσαμε ένα ερωτηματολόγιο στα παιδιά της κάθε τάξης που περιείχε α) πράξεις πρόσθεσης με τη χρήση μόνο του αριθμητικού κώδικα, β) λεκτικά προβλήματα (αριθμητικός και λεκτικός κώδικας) και γ) προβλήματα πρόσθεσης με τη χρήση τριών κωδίκων (αριθμητικός, λεκτικός, εικονικός). Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ ψηλό στις πράξεις με μόνο τον αριθμητικό κώδικα και σχετικά ψηλό στα προβλήματα με το λεκτικό κώδικα. Χαμηλότερο ήταν το ποσοστό επιτυχίας σε έργα με τους τρεις κώδικες. Αυτό δείχνει ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων δεν μεταφέρεται αυτόματα από το ένα πλαίσιο κωδίκων στο άλλο και ότι όσο πιο πολλοί κώδικες αναπαραστάσεων εμπλέκονται στην παρουσίαση του προβλήματος, τόσο πιο πολλές δυσκολίες υπάρχουν για τα παιδιά, ιδιαίτερα για αυτά της Α΄ τάξης.

Abstract

The goal of this study was to examine the influence of using different kind of representations - numbers, words, pictures - to present a problem in the solving of addition problems by children of grades 1, 2, and 3. We examined whether there is a kind of representation or a combination of them that facilitates the solving of addition problems and how this influence differentiates with respect to grade. We gave a test to each child containing a) addition facts using only numbers, b) addition-word problems using words and numbers and c) addition problems using numbers, words and pictures. The results showed that achievement percentages were very high for the first category, high for the second category and lower for the third in all grades, especially the first grade. This implies that solving problem ability is not aytomatically transferred from one context to another and also that the more representation codes are involved in the problem the more difficult the problem becomes, especially for the first grade children.

1. Εισαγωγή

Φαίνεται πολύ φυσικό να εκφράζουμε ή να μπορούμε να εκφράζουμε μια ιδέα με πολλούς τρόπους. Αυτό αποτελεί μέρος της ικανότητας κάθε ομιλητή: συνωνυμία, παράφραση, πλεονασμός είναι οικεία φαινόμενα σε κάθε ομιλούμενη γλώσσα. Κατά τον ίδιο τρόπο φαίνεται τελείως φυσικό να μπορεί να παρουσιαστεί ένα σχέδιο ή μια εικόνα σαν επεξήγηση μιας φράσης ή ενός κειμένου, χωρίς άλλη εξήγηση.

Η χρήση πολλών ειδών αναπαράστασης φαίνεται να χαρακτηρίζει την ανθρώπινη σκέψη αν τη συγκρίνουμε από τη μια με τη νοημοσύνη των ζώων και από την άλλη με την τεχνητή νοημοσύνη. Αυτό που διαφοροποιεί τη λειτουργία της ανθρώπινης σκέψης από τη νοημοσύνη των ζώων δεν είναι τόσο η προσφυγή σε ένα σημειωτικό σύστημα επικοινωνίας (μια γλώσσα), αλλά μάλλον η **προσφυγή σε πολλά συστήματα αναπαράστασης:** γλώσσα και γραφική γλώσσα (σχέδιο, ζωγραφική, διαγράμματα κ.α). Όσον αφορά την τεχνητή νοημοσύνη έχει υπογραμμιστεί ότι ένα από τα όρια της είναι η δυσκολία να υπερβεί τη λειτουργική ακαμψία που συνεπάγεται την εξειδίκευση του τρόπου αναπαράστασης. Η εξειδίκευση του τρόπου αναπαράστασης έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό σ' ένα μοναδικό σημειωτικό σύστημα, αυτό της «μπουλιακής» γραφής (Leiser, 1987, σ.1869; Duval, 1993, σ.48).

Από την άλλη πλευρά η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται πάντοτε από τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων και ειδικών σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν λίγο ή πολύ με το πρώτο σύστημα ανάμεσά τους, αυτό της φυσικής γλώσσας (Granger, 1979).

Συνήθως προτείνονται δύο απαντήσεις για να εξηγήσουν την αναγκαιότητα αυτής της ποικιλίας των σημειωτικών αναπαραστάσεων. Επικεντρώνονται κυρίως στο **κόστος επεξεργασίας** και στις **περιορισμένες δυνατότητες αναπαράστασης** για κάθε πεδίο συμβολισμού, π.χ. στις συναρτήσεις οι διάφοροι τρόποι συμβολισμού (αλγεβρικός,

λεκτικός, γραφικός) είναι συμπληρωματικοί ο ένας του άλλου. Η γραφική παράσταση δίνει περισσότερες πληροφορίες για το αντικείμενο που παριστάνει από την αλγεβρική ή λεκτική μορφή. Όμως η τελευταία παρουσιάζει και μεγαλύτερες δυσκολίες επεξεργασίας απ' ότι η αλγεβρική μορφή.

Είναι φανερό ότι οι δύο αυτές απαντήσεις δεν αλληλοαποκλείονται. Αλλά είναι σημαντικό να τονισθεί ότι τοποθετούνται σε διαφορετικά επίπεδα της **γνωστικής δραστηριότητας.**

2. Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών

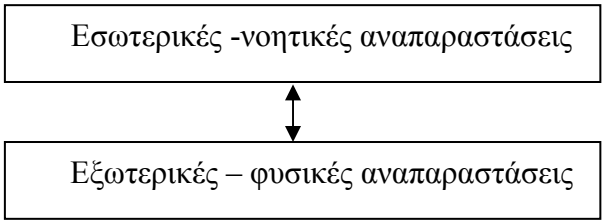
Εξαιτίας της μεγάλης σημασίας των διαφόρων ειδών αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, μεγάλος είναι ο αριθμός των ερευνών για το θέμα αυτό. Οι έρευνες αυτές θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται.

Α	Θεωρία των αναπαραστάσεων ή αναπαραστάσεις και θεωρία μάθησης
Β	Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλήματος
Γ	Αναπαραστάσεις και ειδικές μαθηματικές έννοιες
Δ	Αναπαραστάσεις και μεταφρασιμότητα μεταξύ τους

Κατηγοριοποίηση των σχετικών ερευνών για τις αναπαραστάσεις ανάλογα με το θέμα εξειδίκευσης τους

Στον πρώτο τομέα μπορεί να ταξινομηθούν οι εργασίες αυτές που προτείνουν μια θεωρία γνώσης ή μια θεωρία των αναπαραστάσεων ή των συμβόλων ή μια θεωρία που εμπεριέχει όλα τα προηγούμενα. Έτσι ο Von Glaserfeld (1987, σσ. 3-18) θεωρώντας τη μάθηση ως μια κονστρουκτιβιστική δραστηριότητα και βασιζόμενος σ' αυτή την άποψη προσπαθεί να περιγράψει τις διάφορες προοπτικές υπό τις οποίες μπορεί να αντιμετωπιστεί η έννοια των αναπαραστάσεων, οριοθετώντας έτσι τα πλαίσια για ανάπτυξη μιας θεωρίας για τις αναπαραστάσεις (Von Glaserfeld, 1987, σσ. 215-226). Η στρατηγική του Kaput για την ανάπτυξη μιας θεωρίας βασίζεται στην υπόθεση εργασίας ότι η ανάπτυξη της θεωρίας θα πρέπει να θεμελιώνει την ψυχολογική/γλωσσική πραγματικότητα των κατασκευών και να συνδέει τη δημιουργία εξωτερικών συμβόλων με τις εσωτερικές γνωστικές δομές και διαδικασίες (Kaput, 1987, σσ. 19-26). Οι Goldin και Kaput (1996, σσ. 397-430) εξετάζοντας την ιδέα της αναπαράστασης στη μάθηση των μαθηματικών επιμένουν στη διάκριση μεταξύ εσωτερικών (νοητικών) αναπαραστάσεων και εξωτερικών αναπαραστάσεων (που τις ονομάζουμε εδώ σημειωτικές).Υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ τους όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα.

Αυτή η διάκριση θεωρείται σημαντική για την ψυχολογία της μάθησης και της εκτέλεσης των μαθηματικών. Αυτή η σχέση αναφέρεται και ως μια σχέση μεταξύ του σημαινόμενου (εσωτερικό) και του σημαίνοντος (εξωτερικό).



Οι Roth και McGinn προτείνουν μια νέα θεωρητική προοπτική στις αναπαραστάσεις που έχει τις ρίζες της στις κοινωνικές μελέτες των επιστημών και της τεχνολογίας και επικεντρώνεται στην έννοια των «εγγραφών» (inscriptions), δηλαδή γραφικών αναπαραστάσεων καταγραμμένων σε κάποιο υλικό μέσο (χαρτί, οθόνη υπολογιστή, κλπ) (Roth και McGinn,1998, σσ. 35-59). Ο Houser προτείνει μια σημειωτική θεωρία μάθησης που βασίζεται στη θεωρία του Peirce (Houser, 1987, σσ. 251-274). Τέλος, οι Δημητρίου και Ραπτόπουλος εντάσσουν το θέμα των νοερών αναπαραστάσεων σε μια γενική θεωρία αρχιτεκτονικής του νου. Ειδικότερα προτείνουν ότι το κάθε πεδίο σκέψης τείνει να χρησιμοποιεί εκείνο το είδος της αναπαράστασης που είναι κατάλληλο για την έκφραση και διαχείριση των διαδικασιών επεξεργασίας που το χαρακτηρίζουν (Δημητρίου, Ραπτόπουλος, 1999, σσ. 1-50).

Στον δεύτερο τομέα κατατάσσουμε τις εργασίες που σχετίζουν τις εξωτερικές (ή σημειωτικές) αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλημάτων. Ο Seeger (1998, σσ. 308-343) εξετάζει το ρόλο των αναπαραστάσεων στην καθημερινή μαθηματική δραστηριότητα. Όπως ισχυρίζεται, η χρήση αναπαραστάσεων και διδακτικών υλικών από τους μαθητές για θεραπεία μαθησιακών προβλημάτων αποτελεί μικρή βοήθεια. Γι' αυτούς δημιουργείται ένα νέο πρόβλημα, αφού πρέπει να κατανοούν ταυτόχρονα τον κόσμο των αριθμών και τη σκοπιμότητα των αναπαραστάσεων χωρίς, ίσως, να είναι ικανοί να κάνουν μια σύνδεση μεταξύ των δύο.

Οι Lesh, Behr και Post (1987, σσ. 33-40) εξετάζουν το ρόλο των αναπαραστάσεων και των μεταφράσεων ανάμεσα στις αναπαραστάσεις στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλημάτων, ενώ ο Goldin (1987, σσ. 59-66) εξετάζει τα επίπεδα γλώσσας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Στον τρίτο τομέα κατατάσσουμε τις εργασίες που επικεντρώνουν τη μελέτη των αναπαραστάσεων σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Οι Lesh, Behr και Post (1987, σσ. 41-50) μελετούν τις σχέσεις μεταξύ των ρητών αριθμών καθώς και τις αναλογίες ως προς τις διάφορες αναπαραστάσεις τους.

Ο Janvier (1987a, σσ.147-188) εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των αντιλήψεων των μαθητών και των αναπαραστάσεων του κύκλου. Η έννοια της συνάρτησης επίσης είναι αντικείμενο πολλών ερευνών γιατί η έννοια αυτή μπορεί να

εκφραστεί με διάφορους κώδικες: πίνακες τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική μορφή, λεκτική μορφή, κλπ (Ασβεστάς και Γαγάτσης, 1995, Gagatsis, 1997, Duval, 1993, Kaldrimidou και Iconomou 1998, Janvier,1987b).

Τέλος, στον τέταρτο τομέα κατατάσσουμε τις εργασίες που εξετάζουν το πέρασμα (τη μετάφραση) από ένα πεδίο έκφρασης σ' ένα άλλο. Όσο και αν αυτό το πέρασμα φαίνεται φυσικό για μερικές περιπτώσεις, ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία (Duval, 1987), στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά και Γαγάτσης, 1995, Gagatsis, 1997, Duval,1987, Janvier, 1987c).

Είναι φανερό ότι η ταξινόμηση αυτή είναι μια πρώτη προσέγγιση και ότι πολλές μελέτες περιλαμβάνουν ιδέες και των τεσσάρων τομέων. Με βάση αυτή την ταξινόμηση η παρούσα μελέτη σχετίζεται κυρίως με το δεύτερο και τρίτο τομέα.

3. Μέθοδος

α. Υποκείμενα

Η έρευνα έγινε σε μαθητές των τριών πρώτων τάξεων του Δημοτικού. Συγκεκριμένα επιλέγηκαν 3 σχολεία, ένα από αστική περιοχή, ένα από αγροτική και ένα από ημιαστική-εργατική περιοχή. Στο κάθε σχολείο επιλέγηκαν μια Α΄ τάξη, μια Β΄ τάξη και μια Γ΄ τάξη. Έτσι συνολικά είχαμε 79 παιδιά από Α΄ τάξη (27, 29, 23 αντίστοιχα), 79 από Β΄ τάξη (29, 24, 26) και 80 από την Γ΄ τάξη (30, 26, 24). Όσον αφορά το φύλο, υπήρχαν 104 κορίτσια και 135 αγόρια.

β. Σκοπός της έρευνας

Πιο συγκεκριμένα μελετάμε την επίδραση της χρήσης διαφόρων μορφών αναπαράστασης (συμβολική-αριθμητική μορφή, λεκτική μορφή, εικονική μορφή) στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης από παιδιά των τριών πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου. Προσπαθούμε να απαντήσουμε στα παρακάτω δύο ερωτήματα:

-Υπάρχει ένας κώδικας ή ένας συνδυασμός κωδίκων που ευνοεί την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης;

-Οι διάφοροι κώδικες επιδρούν κατά διαφορετικό τρόπο στις διάφορες τάξεις (Α, Β, Γ);

γ. Έργα

Για το λόγο αυτό κατασκευάσαμε τρία δοκίμια, ένα για κάθε τάξη, που περιλαμβάνει τρία μέρη:

Μέρος Α: Συνήθεις πράξεις πρόσθεσης με τη χρήση ενός κώδικα (αριθμητικός). Στη κατηγορία αυτή συμπεριλάβαμε και αφαιρέσεις στις οποίες λείπει ο μειωτέος με αποτέλεσμα η εύρεση του να απαιτεί πρόσθεση. π.χ. 7+2=□, 12+□=19.

Μέρος Β: Λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης με χρήση δύο κωδίκων (αριθμητικός και λεκτικός – βλ. παραδείγματα παρακάτω).

Μέρος Γ: Προβλήματα πρόσθεσης με χρήση τριών κωδίκων (αριθμητικός, λεκτικός, εικονικός), όπως το πιο κάτω:

Πρόβλημα με τρεις κώδικες αναπαραστάσεων (λεκτικό, αριθμητικό, εικονικό) που δόθηκε στη Γ΄ τάξη

Για να είναι συγκρίσιμα τα τρία ερωτηματολόγια όσον αφορά τα προβλήματα εφαρμόσαμε την ταξινομία του G. Vergnaud για τις προσθετικές σχέσεις (στο Γαγάτσης, 1995, σσ. 63-91).

Ο Vergnaud διακρίνει έξι μεγάλες κατηγορίες προσθετικών σχέσεων. Στο δοκίμιο περιλήφθησαν προβλήματα από τις δύο πρώτες κατηγορίες και συγκεκριμένα:

Πρώτη Κατηγορία: **Σύνθεση δύο μέτρων για να δώσουν ένα μέτρο.** Δύο παραδείγματα από την έρευνα μας που εμπίπτουν σ΄ αυτή την κατηγορία είναι τα εξής:

Πρόβλημα Β1 (από τη Α΄ τάξη): Ο Γιάννης έχει στο ένα χέρι 6 καραμέλες και στο άλλο 4 καραμέλες. Πόσες είναι όλες οι καραμέλες που κρατά;

Πρόβλημα Β2 (από την Γ' τάξη): Ο κ. Κώστας αγόρασε ένα ραδιόφωνο για £245 και μια τηλεόραση για £389. Πόσα πλήρωσε συνολικά;

Δεύτερη Κατηγορία: **Ένας μετασχηματισμός ενεργεί πάνω σε ένα μέτρο για να δώσει ένα νέο μέτρο**. Παραδείγματα από την έρευνά μας αυτής της κατηγορίας είναι τα εξής:

Πρόβλημα Β3 (από τη Β΄ τάξη): Ο Μάριος έπαιξε βόλους με το Μιχάλη. Ο Μάριος είχε αρχικά 23 βόλους. Κέρδισε στο παιγνίδι 14 βόλους. Πόσους βόλους έχει τώρα;

Πρόβλημα Β4 (από την Α΄ τάξη): Η Κατερίνα είχε 9 αυτοκινητάκια. Στα γενέθλια της οι γονείς της έδωσαν ακόμα 8 αυτοκινητάκια. Πόσα αυτοκινητάκια έχει τώρα;

Επίσης, συμπεριλάβαμε προβλήματα αυτής της κατηγορίας (μετασχηματισμού μέτρου σε νέο μέτρο) όταν όμως το αρχικό μέτρο είναι άγνωστο. Παράδειγμα από την έρευνα είναι τα εξής:

Πρόβλημα Β5 (από την Γ΄ τάξη): Το πρωί ο Αντρέας έφερε λεφτά στο σχολείο του. Ξόδεψε 125σ. Το μεσημέρι που σχόλασε είχε 252σ. Πόσα λεφτά είχε όταν ήρθε το πρωί στο σχολείο;

Τέλος στα έργα υπάρχει και η παράμετρος «πολυπλοκότητα στις πράξεις». Το ερωτηματολόγιο της Α΄ τάξης συμπεριλαμβάνει πράξεις και προβλήματα με μονοψήφιους αριθμούς εκ των οποίων οι μισές απαιτούν υπερπήδηση δεκάδας και τα άλλα μισά όχι. Το ίδιο συμβαίνει και στις άλλες δύο τάξεις με τη διαφορά ότι στη Β΄ τάξη οι αριθμοί είναι διψήφιοι και στη Γ΄ τάξη τριψήφιοι.

Πρέπει να λεχθεί ότι τα τρία δοκίμια (των τάξεων) έχουν πλήρη αντιστοιχία. Δηλαδή υπάρχουν 6 πράξεις πρόσθεσης (Α1…Α6) εκ των οποίων οι δύο τελευταίες (Α5, Α6) είναι αφαιρέσεις που λείπει ο μειωτέος. Οι Α2, Α4, Α6 απαιτούν κάποια υπερπήδηση στην πράξη. Ακολουθούν δύο λεκτικά προβλήματα σύνθεσης μέτρου (Β1, Β2), δύο λεκτικά προβλήματα μετασχηματισμού μέτρου (Β3, Β4) και δύο λεκτικά προβλήματα μετασχηματισμού μέτρου με άγνωστο το αρχικό μέτρο (Β5, Β6). Σε κάθε κατηγορία, το πρώτο πρόβλημα δεν απαιτεί υπερπήδηση στην πράξη του ενώ το δεύτερο απαιτεί. Ακριβώς οι αντίστοιχες καταστάσεις υπάρχουν και στα προβλήματα με τρεις κώδικες αναπαράστασης (εικόνα, λέξεις, αριθμοί) (C1…C6).

Προβλήματα	**Αριθμητικές Πράξεις**
Σύνθεση μέτρων (Β1,Β2, C1,C2)	Συνήθεις προσθέσεις (Α1, Α2, Α3, Α4)
Μετασχηματισμός μέτρου (Β3, Β4, C3, C4)	(7+2=), (13+8=)
Μετασχηματισμός μέτρου με άγνωστη αρχική ποσότητα (Β5, Β6, C5, C6)	Αφαίρεση όπου λείπει ο μειωτέος (Α5,Α6) (☐ -11=24) (☐ - -- 284=398)

Κώδικας αναπαράστασης έργων
Ένας (αριθμητικός) (Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6)
Δύο (αριθμητικός-λεκτικός) (Β1, Β2, Β3, Β4, Β5, Β6)
Τρείς (αριθμητικός-λεκτικός-εικονικός) (C1, C2, C3,C4, C5, C6)

Πολυπλοκότητα στις πράξεις	
Μονοψήφιοι αριθμοί Α΄ Τάξη	Χωρίς υπερπήδηση (Α1, Α3, Α5, Β1, Β3, Β5, C1, C3, C5)
	Με υπερπήδηση (Α2, Α4, Α6, Β2, Β4, Β6, C2, C4, C6)
Διψήφιοι αριθμοί Β΄ τάξη	Χωρίς υπερπήδηση (Α1, Α3, Α5, Β1, Β3, Β5, C1, C3, C5)
	Με υπερπήδηση (Α2, Α4, Α6, Β2, Β4, Β6, C2, C4, C6)
Τριψήφιοι αριθμοί Γ΄ τάξη	Χωρίς υπερπήδηση (Α1, Α3, Α5, Β1, Β3, Β5, C1, C3, C5)
	Με υπερπήδηση (Α2, Α4, Α6, Β2, Β4, Β6, C2, C4, C6)

Πίνακας 1: Κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών των έργων που χρησιμοποιήθηκαν

Ο πίνακας 1 ανακεφαλαιώνει τις κύριες διαστάσεις στις οποίες κινήθηκε το κάθε δοκίμιο και δείχνει πώς κατανεμήθηκαν οι ερωτήσεις του δοκιμίου στην κάθε χαρακτηριστική διάσταση. Επισημαίνουμε ότι στα λεκτικά προβλήματα συμπεριλήφθηκαν και δύο προβλήματα που δεν ήταν προβλήματα πρόσθεσης, για να μην θεωρήσουν οι μαθητές ότι παντού πρέπει να κάνουν πρόσθεση. Τα προβλήματα αυτά δεν λήφθηκαν υπ΄ όψη στην μετέπειτα ανάλυση.

δ. Κριτήρια βαθμολόγησης

Η βαθμολόγηση των ερωτηματολογίων έγινε ως εξής:

Οι αριθμητικές ασκήσεις βαθμολογήθηκαν με 0 αν ήταν λανθασμένες ή 4 αν ήταν σωστές. Όσον αφορά τα προβλήματα, κατά την συμπλήρωση του δοκιμίου ζητούσαμε από τα παιδιά να μην βάζουν μόνο την απάντηση, αλλά να εξηγούν πώς βρήκαν την απάντησή τους, γράφοντας τις τυχόν πράξεις τους στο δοκίμιο. Έτσι βαθμολογούσαμε με **'0' αν η απάντηση και η εξήγηση (πράξη) ήταν λάθος, με '1' αν η απάντηση ήταν λάθος αλλά η εξήγηση σωστή, με '2' αν η απάντηση ήταν σωστή αλλά η εξήγηση λάθος, με '3' αν η απάντηση ήταν σωστή αλλά δεν υπήρχε εξήγηση και με '4' αν η απάντηση και η εξήγηση ήταν σωστές.**

ε. Υποθέσεις της έρευνας

Με βάση το σκοπό και τα έργα της έρευνας διατυπώσαμε τις παρακάτω υποθέσεις:

α. Όσο πιο πολλοί κώδικες αναπαραστάσεων απαιτείται να τύχουν επεξεργασίας για να κατανοηθεί το πρόβλημα, τόσο πιο δύσκολο θα ήταν για τα παιδιά να λύσουν το πρόβλημα. Έτσι, αναμέναμε ότι τα προβλήματα με τους τρεις κώδικες θα ήταν πιο δύσκολο να λυθούν παρά αυτά με τους 2 κώδικες, τα οποία φυσικά θα ήταν πιο δύσκολα από αυτά με μόνο τον αριθμητικό κώδικα. (Βέβαια το πρόβλημα δεν είναι μόνο θέμα αριθμού κωδίκων, αλλά και της ίδιας της φύσης του κάθε κώδικα).

β. Η πρώτη υπόθεση αναμέναμε να είναι πιο έντονη στη πρώτη τάξη, όπου και για αναπτυξιακούς λόγους και για γνωστικούς λόγους τα παιδιά θα έβρισκαν περισσότερες δυσκολίες στη σύνθεση της εικόνας του προβλήματος μέσα από τρεις κώδικες αναπαράστασης.

4. Αποτελέσματα

Εξετάσαμε τα ποσοστά επιτυχίας σε κάθε ερώτηση. Αυτά φαίνονται στο παράρτημα 1. Τα έργα κωδικοποιήθηκαν έτσι ώστε αυτά με τον ίδιο αριθμό να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά (σύνθεση μέτρων, μετασχηματισμός μέτρων, μετασχηματισμός μέτρων με άγνωστη αρχική ποσότητα, με ή χωρίς υπερπήδηση στην πράξη) με μόνη διαφορά τους κώδικες αναπαράστασης ο οποίος δηλώνεται με το γράμμα Α, Β, C όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1. Τα αριθμητικά έργα (Α1, Α2, Α3, Α4) λύθηκαν επιτυχώς από αρκετά μεγάλο ποσοστό σε όλες τις τάξεις. Ειδικά τα έργα Α1, Α3 που δεν έχουν υπερπήδηση στην πράξη είχαν ποσοστά σωστής απάντησης από 87% μέχρι και 97%. Τα Α2, Α4 που έχουν υπερπήδηση έχουν λίγο χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας και κυμαίνονται από 73% μέχρι και 91%. Τα έργα Α5 και Α6 (ειδικά το Α6 που είχε και υπερπήδηση) που λείπει ο μειωτέος, δυσκόλεψαν περισσότερο τα παιδιά όλων των τάξεων. Εδώ το ποσοστό επιτυχίας στο Α5 πέφτει γύρω στο 60 % και για τις τρεις τάξεις. Στο έργο Α6 η πρώτη τάξη σημειώνει ποσοστό αποτυχίας 69%, ενώ οι άλλες δύο ποσοστό αποτυχίας γύρω στο 47%. Στο έργο αυτό οι τάξεις διαφοροποιούνται με μια στατιστικώς σημαντική διαφορά ($p<0,01$)

Η εικόνα των λεκτικών έργων είναι παρόμοια. Τα έργα Β1, Β2, Β3 είναι εύκολα για όλες τις τάξεις. Γύρω στο 80% όλων των τάξεων έλυσαν σωστά τα προβλήματα αυτά (είτε με εξήγηση, είτε χωρίς αυτή) με εξαίρεση το Β2 στη δευτέρα τάξη όπου το ποσοστό επιτυχίας ήταν 70% και αυτό υποπτευόμαστε ότι οφείλεται στο ότι η διατύπωσή του ήταν λίγο παραπλανητική σε σχέση με τα αντίστοιχα των άλλων τάξεων. Ένα σημαντικό ποσοστό των παιδιών που δεν κατάφεραν να λύσουν τα έργα αυτά βρήκαν τη σωστή πράξη αλλά δεν μπόρεσαν να εκτελέσουν τον αλγόριθμο ορθά (ειδικά στο έργο Β3 που είχε υπερπήδηση).

Το έργο Β4 είναι δυσκολότερο. Λύνεται σε ποσοστά 54-65% από όλες τις τάξεις. Το υπολειπόμενο ποσοστό αποτυχίας κατανέμεται σχεδόν εξίσου και στις τρεις τάξεις και αφορά παιδιά που είτε δεν έλυσαν καθόλου το πρόβλημα (βαθμολογία 0), είτε έλυσαν μερικώς το έργο (βαθμολογία 1). Ένας πιθανός λόγος για τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στο Β4 είναι το ότι η πράξη του απαιτούσε υπερπήδηση δεκάδας.

Τα έργα Β5 και Β6 παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Σε αυτά η Α΄ τάξη σημειώνει σημαντική αποτυχία (ιδιαίτερα στο Β6 που απαιτεί υπερπήδηση, έχει ποσοστό επιτυχίας 36%). Οι άλλες δύο τάξεις πάνε αρκετά καλύτερα και έχουν ποσοστά επιτυχίας που κυμαίνονται από 55% (η τρίτη τάξη στο Β6) μέχρι και 80% (η δευτέρα τάξη στο Β5). Αυτό το φαινόμενο (η Α΄ τάξη να είναι αρκετά χαμηλότερα) το είδαμε και στο αντίστοιχο αριθμητικό έργο (Α6). Και σ' αυτά τα δύο έργα έχουμε διαφοροποίηση των τάξεων με στατιστικώς σημαντική διαφορά ($p<0,01$).

Η εικόνα είναι διαφορετική στα έργα με τους τρεις κώδικες αναπαράστασης. Σχεδόν σε όλα τα εικονικά έργα η πρώτη τάξη υπολείπεται λίγο ή πολύ των άλλων δύο. Σε όλα αυτά τα έργα οι τάξεις διαφοροποιούνται σημαντικά ($p<0.01$). Σε γενικές γραμμές τα εικονικά έργα C1, C2, C3, C4 λύνει ένα ποσοστό 57-67% για την πρώτη τάξη, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες τάξεις είναι μεταξύ του 65% και του 78%.

Στα έργα C5, C6 που είναι μετασχηματισμός με άγνωστη την αρχική ποσότητα τα ποσοστά πέφτουν πολύ και βρίσκονται στο 40% για την πρώτη και γύρω στο 55-65% για τις άλλες τάξεις. Και πάλι βλέπουμε την Α΄ τάξη να είναι αρκετά χαμηλότερα όπως έγινε και στις αντίστοιχες ερωτήσεις Β6 και Α6.

Τα προβλήματα με τους 3 κώδικες είναι απαιτητικότερα αφού χρειάζεται ο μαθητής να συνθέσει αριθμητικά, λεκτικά και εικονικά στοιχεία για να έχει μια ορθή αναπαράσταση του προβλήματος. Φαίνεται ότι γι' αυτό το λόγο τα παιδιά της Α΄ τάξης σημειώνουν μεγαλύτερη αποτυχία. Τούτο μπορεί επίσης να σημαίνει ότι τα παιδιά στην ηλικία αυτή έχουν δυσκολία να επιτύχουν το συντονισμό των εικονικών με τις λεκτικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις των προβλημάτων αυτών. Μια τέτοια ερμηνεία συνάδει με τα ευρήματα της DeLoache et al (1998). Σύμφωνα μ' αυτά, τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας έχουν δυσκολία στη μετάφραση αναπαραστάσεων και στην εύρεση σχέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων. Παρόμοια φάνηκε ότι τα προβλήματα μετασχηματισμού με άγνωστη την αρχική ποσότητα δυσκολεύουν επίσης τα παιδιά της Α΄ τάξης. Πρέπει όμως να επισημανθεί ότι και για τα παιδιά των δύο μεγαλύτερων

τάξεων τα προβλήματα που είχαν τρεις κώδικες (εικόνα, λέξεις, αριθμοί) ήταν πιο δύσκολα από ότι τα προβλήματα με δύο κώδικες (λέξεις, αριθμοί). Πλην όμως, η δυσκολία αυτή δεν είναι τόσο αυξημένη όσο για τα παιδιά της πρώτης τάξης. Στον πίνακα 2 φαίνεται το μέσο ποσοστό μαθητών ανά τάξη που έλυσε σωστά τα προβλήματα στην κάθε κατηγορία κωδίκων αναπαράστασης του προβλήματος.

	Α΄ τάξη (%)	Β΄ τάξη (%)	Γ΄ τάξη (%)
Αριθμητικός κώδικας	76,08	78,9	71,65
Λεκτικός + Αριθμητικός κώδικας	67,56	74,9	73,38
Εικόνικος + Λεκτικός + Αριθμητικός κώδ.	54,63	67,32	65,03

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Μέσο ποσοστό επιτυχίας ανά τάξη και ανά κατηγορία προβλημάτων

Διαφορές φύλου δε βρέθηκαν. Αγόρια και κορίτσια λύνουν ή δε λύνουν τα έργα σε ποσοστά που δεν διαφέρουν συστηματικά υπέρ του ενός φύλου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραγοντική ανάλυση που κάναμε επιβεβαιώνει αυτό το πρότυπο. Η παραγοντική ανάλυση έγινε επί όλου του πληθυσμού και για όλα τα έργα. Εμφανίστηκαν πέντε παράγοντες από τους οποίους ο μεν πρώτος περιελάμβανε όλα τα έργα με 3 κώδικες (εικόνα, λέξεις, αριθμοί) και ερμηνεύει το 16% της διασποράς, ο δεύτερος περιελάμβανε τα έργα με λέξεις και αριθμούς (B1, B2, B3, B4) και ερμηνεύει το 12% της διασποράς, ο τρίτος αφορά έργα με μόνο αριθμούς (A1, A2, A3, A4) και ερμηνεύει το 12% της διασποράς και οι άλλοι δύο παράγοντες αφορούν ο μεν ένας αριθμητικά έργα μετασχηματισμού μέτρου με άγνωστη αρχική ποσότητα (A5, A6) (9% της διασποράς) και ο άλλος τα αντίστοιχα λεκτικά έργα (B5, B6) (11% της διασποράς). Οι δύο τελευταίοι παράγοντες ομαδοποιούν τα δύσκολα έργα των αριθμητικών και λεκτικών έργων. Συνολικά οι παράγοντες ερμηνεύουν το 61% της συνολικής διασποράς.

Συμπεράσματα

Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τα μαθηματικά ως ένα σύστημα χειρισμού αναπαραστάσεων για τις ποσοτικές κυρίως σχέσεις του κόσμου. Δηλαδή για τα **πλήθη και συναθροίσεις, αυξομειώσεις, ανακατανομές, διατάξεις** που μπορούν να αφορούν **κατηγορίες, αιτιότητα, χώρο ή χρόνο** σε διάφορα πεδία, όπως ο φυσικός, βιολογικός ή ψυχολογικός κόσμος και υποπεδία, όπως η οικονομία, η φυσική, η χημεία κ.α

Κατανόηση των μαθηματικών σημαίνει αναγκαστικά κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν στον κόσμο όπως αυτές παριστάνονται με τους διάφορους κώδικες, που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά (αριθμοί, λέξεις, σχήματα, σύμβολα κ.λ.π).

Κατανόηση σχέσεων σημαίνει δημιουργία κατάλληλων νοητικών αναπαραστάσεων για την άποψη της πραγματικότητας που πρέπει να κατανοηθεί. Όμως διαφορετικές απόψεις της πραγματικότητας έχουν τις δικές τους νομοτέλειες ως προς τις αναπαραστάσεις, τις πράξεις και τις υπολογιστικές διαδικασίες που απαιτούν.

Επομένως, αναπαραστάσεις και υπολογιστικές διαδικασίες δε μεταφέρονται αυτόματα από τη μια περιοχή σχέσεων στην άλλη. Η μεταφορά προϋποθέτει ότι θα γίνουν άμεσα φανερές όλες οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων και των πράξεων που προέρχονται από διαφορετικές περιοχές ή κώδικες.

Ακριβώς η έρευνα μας έδειξε ότι αυτή η μεταφορά από τον ένα κώδικα (ή παράσταση) στον άλλο δεν είναι κάτι που γίνεται αυτόματα, αλλά μάλλον δημιουργεί αρκετές δυσκολίες, ειδικά σε παιδιά μικρής ηλικίας. Αυτό το συμπέρασμα έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των DeLoache *et al* (1998), η οποία εισηγείται πως τα διάφορα διδακτικά σύμβολα (εικόνες, υλικά, αναπαραστάσεις) που χρησιμοποιούνται στη διδακτική πράξη των μαθηματικών, δεν εγγυούνται πάντα την επιτυχή υπερπήδηση γνωστικών εμποδίων που μπορεί να έχουν αρκετά παιδιά. Αυτά τα παιδιά πρέπει πρώτα – πρώτα να συνειδητοποιήσουν **ότι υπάρχει μια σχέση** μεταξύ του συμβόλου που τους παρουσιάζει ο δάσκαλος ή δασκάλα τους και της έννοιας που είναι στόχος της διδασκαλίας. Ακολούθως πρέπει να καταλάβουν **πώς σχετίζονται τα διάφορα επιμέρους στοιχεία του συμβόλου με τα στοιχεία της έννοιας** και τέλος πρέπει να μπορούν να **πραγματώνουν τον μετασχηματισμό των πράξεων που γίνονται επί του συμβόλου σε πράξεις που γίνονται επί της έννοιας**. Σε αντίθετη περίπτωση το διδακτικό σύμβολο μπορεί να λειτουργήσει ακόμα και αρνητικά στρέφοντας την προσοχή των παιδιών σε άλλη κατεύθυνση από την επιθυμητή.

Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση πολλών ειδών αναπαραστάσεων για τη μετάδοση μιας μαθηματικής πληροφορίας. Μια από τις μεγάλες δυνατότητες της μαθηματικής πληροφορίας είναι ότι μπορεί να εκφραστεί (κατά συμπληρωματικό, συνήθως, τρόπο) με πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις. Επομένως, η ενασχόληση του παιδιού στα μαθηματικά με διάφορα είδη αναπαραστάσεων, παρόλο που φαίνεται να δημιουργεί δυσκολίες σε μικρές ηλικίες, είναι απαραίτητο στοιχείο της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Επιπλέον μακροπρόθεσμα οι μαθητές που ασχολούνται συστηματικά στην καθημερινή τάξη των μαθηματικών με διάφορα είδη αναπαραστάσεων και μεταφράσεων μεταξύ τους, είναι πιθανόν να μπορούν να υπερπηδούν με μεγαλύτερη ευκολία γνωστικά εμπόδια σχετικά με διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Αυτό όμως είναι αντικείμενο μακροχρόνιας έρευνας.

Είναι φανερό ότι υπάρχουν περιπτώσεις που η μετάφραση από τον ένα κώδικα αναπαράστασης στον άλλο είναι σχεδόν αυτόματη, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις που η μετάφραση αυτή δημιουργεί δυσκολίες. Γι' αυτό ένα επόμενο βήμα της έρευνας αυτής θα μπορούσε να είναι μια ταξινόμηση των διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας που απαιτεί η μετάφρασή τους σε άλλο κώδικα. Με άλλα λόγια είναι δυνατό να ορισθεί μια

σημασιολογική συμφωνία μεταξύ αναπαραστάσεων που επιτρέπει την όσο το δυνατό πιο αυτόματη μετάφραση από τη μια παράσταση στην άλλη σε αντιδιαστολή με τη σημασιολογική ασυμφωνία που δυσκολεύει τη μετάφραση;

Βιβλιογραφία

Ασβεστά , Α., & Γαγάτσης, Α. (1995). Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στο Α. Γαγάτσης (Ed.), **Διδακτική και ιστορία των Μαθηματικών.** Θεσσαλονίκη: ART of TEXT.

Γαγάτσης, Α.(1995). **Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία – Έρευνα.** Θεσσαλονίκη: ART of TEXT.

DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The development of early symbolization: Educational implications**. Learning and Instruction**, 8, (4), 325-339.

Demetriou, A., & Paftopoulos, A. (1999). Modeling the developing mind: From structure to change. **Developmental Review,** (in press).

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives** (pp. 37-65). IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των Μαθηματικών. **Διάσταση**, 2, 56-74.

Gagatsis, A. (1997). Problem di interpretazione connessi con il concetto di funzione. **La matematica e la sue didattica**, No 2, (pp.132-149).

Glasersfeld, E. V. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 3-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Glasersfeld, E. V. (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 215- 226). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (1987). Levels of language in Mathematics Problem solving. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 59-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah, **Theories of mathematical learning** (397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Granger, G. (1979). **Langages et Epistemologie**. Paris: Klinksieck.

Houser, N. (1987). Toward a Peircean semiotic theory of learning. **American Journal of Semiotic**, 5, (2), 251-274.

Janvier, C. (1987a). Conceptions and representations: The circle as an example. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 147-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1987b).Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 67-72). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1987c). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of Mathematics: The case of graphic representation of functions. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds), **Language and communication in the mathematics classroom.** Reston,VA: NCTM

Kaput, J. J. (1987).Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Leiser, D. (1987). Les fonctions de stockage. **Psychologie**. (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckart), Encyclopedie de la Pleiade, pp. 1836-1870.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.) **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics** (pp. 41-57). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Roth, W.M., & McGinn, M.K. (1998). Inscriptions: Towards a theory of representing as social practice . **Review of Educational Research,** 68, (1), 35-59.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematical classroom: Reflections and constructions. In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio, **The culture of the mathematics classroom** (308-343). Cambridge:
Cabridge UP.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ποσοστά επιτυχίας σε κάθε ερώτηση ανά τάξη

		ΕΡΓΑ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΥΣ						ΕΡΓΑ ΜΕ ΛΕΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΥΣ						ΕΡΓΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ- ΛΕΞΕΙΣ- ΑΡΙΘΜΟΥΣ					
	Κωδικ.	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	Βαθμ.	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%	F%
Α΄ ταξη	0	6,3	13,8	2,5	18,8	33,8	68,8	5	10	10	13,8	40	50	37,5	33,8	38,8	22,5	55	53,8
	1							3,8	8,8	1,3	21,3	11,3	11,3	2,5	3,8	3,8	10	1,3	8,8
	2							1,3			1,3	3,8	2,5		1,3				
	3							3,8				8,8	6,3	22,5	21,3	18,8	20	22,5	13,8
	4	93,8	86,3	97,5	81,3	66,3	31,3	86,3	81,3	88,8	63,8	36,3	30	37,5	40	38,8	47,5	21,3	23,8
Β΄ τάξη	0	6,3	8,9	7,6	22,8	36,7	44,3	7,6	10,1	12,7	21,5	26,3	17,7	15,2	17,7	22,8	13,9	38	35,4
	1							8,9	17,7	6,3	12,7		11,4	8,9	2,6	6,3	16,5	6,3	5,1
	2							1,3	1,3	1,3		1,3	1,3			2,5	2,5	1,3	
	3							6,3	3,8	5,1	3,8	2,5	5,1	11,4	13,9	7,6	10,1	6,3	5,1
	4	93,7	91,1	92,4	77,2	63,3	55,7	75,9	67,1	74,7	62	78,5	64,6	64,6	64,6	60,8	57	48,1	54,4
Γ΄ τάξη	0	11,3	26,3	12,5	23,7	45	51,2	5	10	8,8	26,3	27,2	36,3	25	18,8	21,3	16,3	26,3	32,5
	1							2,5	10	7,5	20	4,6	8,8	3,8	16,3	13,8	11,3	8,8	13,8
	2							1,3				2,1		1,3			1,3		
	3									1,3		3,8	1,3	2,5	5	5	2,5	6,3	1,3
	4	88,8	73,5	87,5	76,3	55	48,8	91,3	80	82,5	53,8	72,5	53,8	67,5	60	60	68,8	58,8	52,5