Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γεωργακάκης Ιωάννης, Πανεπιστήμιο Πατρών georgak@upatras.gr
Γεωργιάδου Βαρβάρα, Roehampton Institute, gkabou@teipat.gr
Μαρκόπουλος Χρήστος, Πανεπιστήμιο Πατρών, cmarkopl@upatras.gr
Πόταρη Δέσποινα, Πανεπιστήμιο Πατρών, potari@upatras.gr

Λέξεις Κλειδιά: εξεικόνιση, Γεωμετρία, εκπαίδευση εκπαιδευτικών, αναλυτική σκέψη, διαίσθηση.
Θέμα: Διδακτική των Μαθηματικών: Μαθηματική σκέψη και μαθηματικά εργαλεία.
Επίπεδο Εκπαίδευσης: Μεταδευτεροβάθμιο.
Κατηγορία εργασίας: Ανίχνευση, μελέτη περιπτώσεων.

Περίληψη

Η εργασία αναφέρεται σε ένα διδακτικό περιβάλλον όπου μελλοντικοί δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν δραστηριότητες μέσα από τις οποίες η Γεωμετρία αντιμετωπίζεται ως ένα εργαλείο για την κατανόηση και περιγραφή του χώρου, καθώς και ως ένα μέσο για εξεικόνιση (visualisation) σε μη γεωμετρικές καταστάσεις. Αρχικά παρουσιάζεται η φιλοσοφία του προγράμματος που αναπτύχθηκε, καθώς και η φύση των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν. Στη συνέχεια μέσα από την ανάλυση τριών διαφορετικών διδακτικών καταστάσεων προσπαθούμε να δείξουμε πως το όλο περιβάλλον που δημιουργείται, αξιοποιεί τις διαφορετικές μαθηματικές εμπειρίες των φοιτητών και τις εξελίσσει. Από την ανάλυση φαίνεται να προκύπτει ότι το περιβάλλον υποστηρίζει την εξέλιξη των αντιλήψεων και στρατηγικών των φοιτητών από πιο στοιχειώδεις σε πιο προχωρημένες. Επιπλέον προσδιορίζονται τα χαρακτηριστικά της όλης διδακτικής προσέγγισης που ενθαρρύνουν αυτή την εξέλιξη.

Abstract

This paper refers to a learning environment where prospective primary school teachers face tasks through which Geometry is considered as a tool for understanding and describing the space and also as a means for visualisation in non-Geometric situations. Initially, the philosophy of this program as well as the nature of the tasks are presented. Then through the analysis of three different teaching situations we try to indicate how the whole environment encourages the emergence of students' different mathematical experiences and supports their development from primitive to advanced. In addition to this, the features of this environment are specified.

Εισαγωγή

Διάφορα μοντέλα έχουν υιοθετηθεί σε προγράμματα που αφορούν στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών. Επικρατέστερα είναι το μοντέλο του Schon (1987) «ο δάσκαλος ως αναστοχαζόμενος ασκούμενος» (reflective practitioner), καθώς και η μεταφορά «ο δάσκαλος ως ερευνητής» (Brown, Cooney & Jones, 1992). Στην περίπτωση της μαθηματικής παιδείας τα μοντέλα αυτά εκφράζονται μέσα από την παράλληλη αντιμετώπιση του εκπαιδευτικού ως ερευνητή της σκέψης των μαθητών αλλά και μέσα από την προσωπική του ενασχόληση με τα μαθηματικά. Ένας αριθμός προγραμμάτων έχει προσπαθήσει την αλληλεπίδραση αυτών των δύο διαστάσεων (Even, Tirosh and Markovits, 1996; Georgiadou and Potari, 1998; Πόταρη και Σπηλιωτοπούλου, 1999; Simon and Schifter, 1991). Στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε στη μαθηματική εκπαίδευση των μελλοντικών δασκάλων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στο χώρο της Γεωμετρίας. Βλέποντας την ανάγκη να δημιουργήσουμε ένα περιβάλλον για τους μελλοντικούς δασκάλους που θα δράσει ως μοντέλο για το τι θα μπορούσαν να κάνουν οι ίδιοι με τους μαθητές τους, δίνουμε έμφαση στην αξιοποίηση των ιδεών τους με στόχο την ανάπτυξή τους. Αυτό το περιβάλλον αποκτά ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση της Γεωμετρίας όπου οι εμπειρίες των φοιτητών με το φυσικό χώρο και η ικανότητα τους για εξεικόνιση (visualisation) μπορεί να αποτελέσουν βάση για ανάπτυξη διαισθητικής σκέψης και πιθανό πέρασμα σε αφαιρετικούς συλλογισμούς.

Στο χώρο της Γεωμετρίας οι έρευνες που αναφέρονται σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς επικεντρώνουν κύρια το ενδιαφέρον τους στις αντιλήψεις τους σε συγκεκριμένες γεωμετρικές έννοιες (Baturo and Nason, 1996; Simon and Blum, 1994). Στην ελληνική πραγματικότητα, οι φοιτητές (μελλοντικοί δάσκαλοι) αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αντιμετώπιση γεωμετρικών θεμάτων οι οποίες συνειδητοποιούνται από τους ίδιους κατά τη διάρκεια της πρακτικής τους άσκησης στο σχολείο. Οι περισσότεροι έχουν σταματήσει νωρίς στο Λύκειο την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά, έχουν αρνητικές στάσεις απέναντι τους και κύρια τα πρώτα χρόνια των σπουδών τους στο Πανεπιστήμιο δε βλέπουν την αναγκαιότητα να κάνουν μαθηματικά. Στην περίπτωση όμως της Γεωμετρίας βλέπουν κάποια χρησιμότητα καθώς θεωρούν ότι μελετά το περιβάλλον τους. Επιπλέον κάποιοι από τους φοιτητές πιστεύουν ότι η γεωμετρία καταρρίπτει την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια συνέχεια και έτσι τους επιτρέπει να μπορούν να αντιμετωπίσουν γεωμετρικά θέματα παρόλα τα «μαθηματικά κενά» που έχουν. Οι παραπάνω λόγοι παράλληλα με τη σημασία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό σχολείο μας έκαναν να πιστεύουμε ότι ήταν απαραίτητη η ενασχόλησή τους με

τη γεωμετρία και ιδιαίτερα η αντιμετώπισή της ως ένα εργαλείο «για κατανόηση, περιγραφή και αλληλεπίδραση με το χώρο που ζούμε» (Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century, 1995).

Η εργασία αυτή αναφέρεται σε ένα πρόγραμμα, εργαστήριο, που αναπτύχθηκε παράλληλα με ένα υποχρεωτικό μάθημα στα Μαθηματικά, όπου οι φοιτητές του Α΄ έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών αντιμετωπίζουν δραστηριότητες κυρίως στο χώρο της Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα θα εστιάσουμε με ποιο τρόπο το πρόγραμμα αξιοποιεί τις διαφορετικές μαθηματικές εμπειρίες των φοιτητών και τις εξελίσσει. Θα παρουσιάσουμε αρχικά τη φιλοσοφία του προγράμματος και τη φύση των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν, ενώ στη συνέχεια μέσα από τρία διαφορετικά παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την επίδραση του προγράμματος:

- στις αντιλήψεις των φοιτητών και στην εξέλιξή τους,
- στη μορφή επικοινωνίας που αναπτύχθηκε,
- στους συλλογισμούς και στις αιτιολογήσεις που διατυπώθηκαν.

Φιλοσοφία του προγράμματος

Το πρόγραμμα χαρακτηρίζεται από μια εποικοδομιστική θεώρηση για τη διδασκαλία και μάθηση (Cobb and Steffe, 1983; Davis, Maher and Noddings, 1990, Simon, 1995). Πιο συγκεκριμένα δίνεται έμφαση στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών σημασιών που οικοδομούνται μέσα από την αλληλεπίδραση των ατόμων που συμμετέχουν στη διαδικασία της μάθησης (Cobb, Yackel & Wood, 1991). Στο πρόγραμμα οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δραστηριότητες σε μικρές ομάδες, συζητούν τις επιλογές τους, παρουσιάζουν την εργασία τους η οποία μπαίνει σε διαπραγμάτευση στην τάξη. Ο διδάσκων θέτει τις δραστηριότητες οι οποίες εξελίσσονται μέσα από μια αλλαγή αποφάσεων και στόχων τόσο των φοιτητών όσο και του διδάσκοντα. Στην περίπτωση του διδάσκοντα οι αλλαγές αυτές έχουν μια γνωστική διάσταση και στηρίζονται κύρια στις ιδέες και στρατηγικές που αναπτύσσουν οι φοιτητές, στην προσπάθειά του να διερευνήσει αυτές τις αντιλήψεις, στις συγκρούσεις ανάμεσα σ' αυτό που αναμένει και σ' αυτό που αντιμετωπίζει, στην προσπάθεια του να ενθαρρύνει την κατανόηση και τη μαθηματική ανάπτυξη. Παράλληλα υπάρχουν μη γνωστικοί παράγοντες που καθορίζουν τις αποφάσεις του όπως η ενθάρρυνση των φοιτητών και η διατήρηση ισορροπίας ανάμεσα στη μαθηματική τους ανάπτυξη και στην διαμόρφωση θετικών στάσεων, η κίνηση του ενδιαφέροντος και η πραγματική συμμετοχή όλων, η εκτίμηση των απόψεων όλων των φοιτητών. Στην περίπτωση των φοιτητών οι δραστηριότητες εξελίσσονται μέσα από το είδος της γνώσης που έχουν, μέσα από την επικοινωνία τους στην ομάδα και στην τάξη και μέσα από τα ερωτήματα που θέτουν κατά την αντιμετώπιση των δραστηριοτήτων.

Στο πρόγραμμα η γεωμετρία αντιμετωπίσθηκε ως ένα εργαλείο μελέτης του τρισδιάστατου και του δισδιάστατου χώρου καθώς και της σύνδεσή τους (Herskowitz, Parzysz and van Dormolen, 1996)). Έμφαση δόθηκε στην άσκηση των φοιτητών να κατασκευάζουν, να χειρίζονται και να τροποποιούν νοερές εικόνες ώστε να επιλύουν προβλήματα. Οι φοιτητές μέσα από ένα χειρισμό συγκεκριμένων φυσικών οντοτήτων και υλικών, δημιουργούσαν υποθέσεις, ανέπτυσσαν τη διαισθητική τους σκέψη και έφταναν στο να κατασκευάζουν σχέσεις. Το συγκεκριμένο και το αφηρημένο βρίσκονταν σε μια συνεχή αλληλεπίδραση και θα μπορούσαμε ίσως να πούμε ότι το πρόγραμμα δεν ενεθάρρυνε μόνο τον επαγωγικό ή τον παραγωγικό συλλογισμό αλλά τη σύνδεση αυτών των δύο αναπτύσσοντας πιθανόν συλλογισμούς που ο Simon (1996) χαρακτηρίζει ως μετασχηματιζόμενους (transformational reasoning) όπου είναι η νοητική ή φυσική δράση μιας λειτουργίας ή ενός συνόλου λειτουργιών σε ένα αντικείμενο ή σε ένα σύνολο αντικειμένων που επιτρέπει σε κάποιον να δει τους μετασχηματισμούς που αυτά τα αντικείμενα υφίστανται και το σύνολο των αποτελεσμάτων αυτών των λειτουργιών.

Το πλαίσιο της έρευνας

Το πρόγραμμα ήταν η υποχρεωτική εργαστηριακή άσκηση που είχαν οι φοιτητές του Α΄ έτους 2 ώρες κάθε εβδομάδα στα πλαίσια του υποχρεωτικού μαθήματος «Μαθηματικά». Η εργαστηριακή άσκηση είχε ως στόχο την προσωπική ενασχόληση των φοιτητών γεγονός που δεν ήταν συχνά δυνατό στο κυρίως μάθημα λόγω του μεγάλου αριθμού των φοιτητών. Στην εργαστηριακή άσκηση οι φοιτητές ήταν χωρισμένοι σε 4 τμήματα των 30 περίπου ατόμων όπου δούλευαν σε ομάδες 3-4 ατόμων. Το πρόγραμμα γίνεται τα τελευταία επτά χρόνια και έχει εξελιχθεί μέσα από την εμπειρία που έχουμε αποκτήσει με τους φοιτητές. Στο προηγούμενο εξάμηνο καθ' όλη τη διάρκεια του προγράμματος (13 εβδομάδων) προσπαθήσαμε να μελετήσουμε πιο συστηματικά το διδακτικό περιβάλλον μέσα από τη μαγνητοφώνηση των συζητήσεων των φοιτητών στις ομάδες και σε όλη την τάξη, που έγιναν στο ένα τμήμα. Παράλληλα χρησιμοποιήσαμε ως στοιχεία τις εργασίες των φοιτητών και τις δικές μας σημειώσεις. Οι τρεις από τους συγγραφείς ήταν διδάσκοντες στα τμήματα, ενώ η μια που ήταν διδάσκουσα στο παρελθόν, συμμετείχε τώρα σαν παρατηρήτρια και κρατούσε σημειώσεις σχετικά με το τι γινόταν στην τάξη. Η έρευνα που κάναμε χαρακτηρίζεται ως εθνογραφική (Eisenhart, 1988) και σε μεγάλο βαθμό τόσο η φύση των στόχων μας όσο και η οργάνωση της ταιριάζουν με το πείραμα διδασκαλίας στην τάξη που περιγράφουν οι Cobb, Yackel & Wood (1988).

Οι δραστηριότητες του προγράμματος

Οι δραστηριότητες ήταν «ανοικτής» φύσης και οργανώθηκαν μέσα από παραδείγματα ερευνών που είχαν ως στόχο τη διερεύνηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (π.χ Ben-Chain, Lappan and Houang, 1989) μέσα από την προηγούμενη εμπειρία με τους φοιτητές, μέσα από τις συζητήσεις των διδασκόντων πάνω στις εμπειρίες τους με τους συγκεκριμένους φοιτητές. Οι δραστηριότητες αν και καθορίζονταν στις συναντήσεις των διδασκόντων πριν από την

κάθε εργαστηριακή άσκηση, εξελίσσονταν όπως ήδη έχουμε αναφέρει κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Από άποψη περιεχομένου θα διακρίνουμε τις παρακάτω θεματικές περιοχές:

- Αναπαράσταση του χώρου στο επίπεδο και αντίστροφα.
- Τετράπλευρα και ιδιότητές τους.
- Επικαλύψεις του επιπέδου από πολύγωνα.
- Σχέσεις περιμέτρου, εμβαδού και όγκου.
- Συγκρίσεις κλασμάτων.
- Οριακές καταστάσεις μέσα από γραφικές παραστάσεις.

Οι δραστηριότητες εκφράζουν τη φιλοσοφία του προγράμματος που έχει ήδη συζητηθεί. Επιπλέον χαρακτηρίζονται από μια δυναμική μεταβολή και μέσα από την αναζήτηση του αμετάβλητου και του μεταβαλλόμενου (Behr, Harel, Post and Lesh, 1992). Επίσης επιτρέπουν στους φοιτητές να αναπτύξουν ένα εύρος στρατηγικών από μια απλή δοκιμή και πλάνη σε πιο παραγωγικές μεθόδους προσέγγισης. Παραδείγματα δραστηριοτήτων και της χρήσης τους στην τάξη δίνονται στα τρία επεισόδια που αναλύουμε παρακάτω.

Ανάλυση διδακτικών καταστάσεων: σημεία που αναδεικνύονται

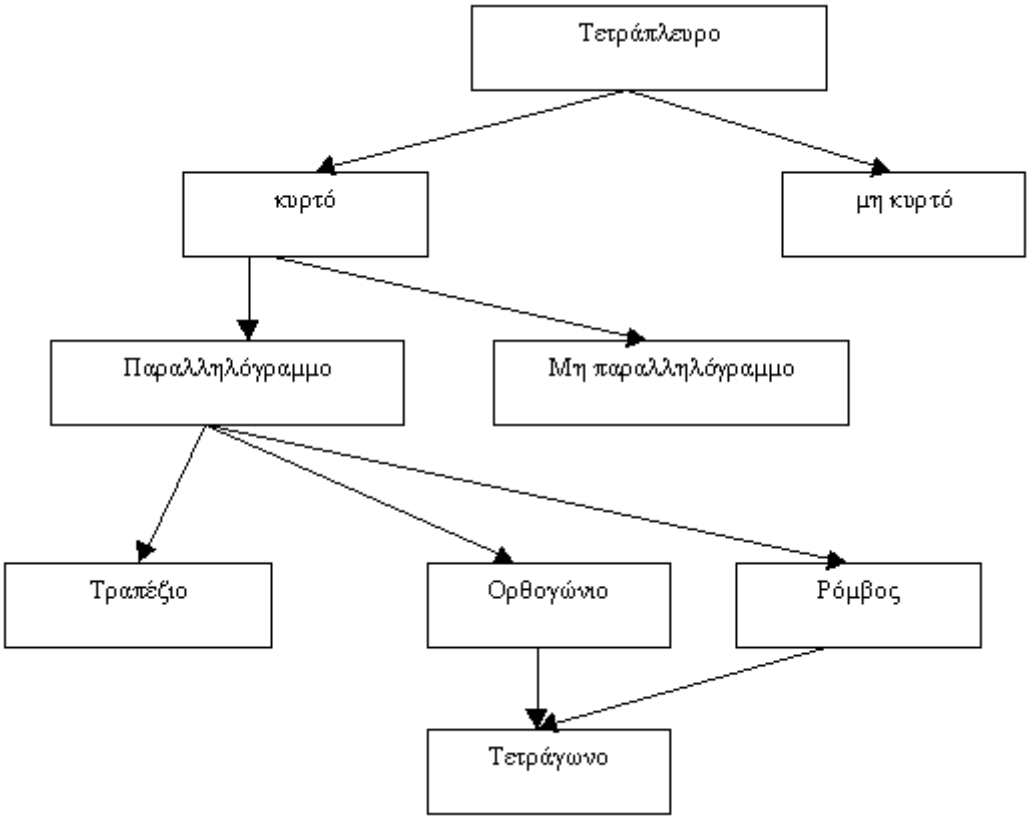
Μέσα από την ανάλυση τριών διαφορετικών διδακτικών καταστάσεων προσπαθούμε να αναδείξουμε κάποια σημεία που φαίνεται ότι χαρακτηρίζουν το περιβάλλον μάθησης που δημιουργήθηκε και το ρόλο της γεωμετρίας σε αυτό το περιβάλλον. Ο άξονας ανάλυσης του πρώτου επεισοδίου στηρίζεται στον πρώτο ερευνητικό μας στόχο και συγκεκριμένα αφορά στην εμφάνιση και εξέλιξη των αντιλήψεων των φοιτητών σχετικά με την έννοια "τετράπλευρο". Το δεύτερο επεισόδιο αναφέρεται σε ένα πραγματικό πρόβλημα όπου η γεωμετρία εμπλέκεται μέσα από τον υπολογισμό επιφάνειας και όγκου και η ανάλυση επικεντρώνεται στις στρατηγικές επίλυσης των φοιτητών και στον τρόπο χειρισμού τους στην τάξη. Τέλος στην τρίτη κατάσταση εστιάζουμε στο πως μια φαινομενικά μη γεωμετρική δραστηριότητα ενθαρρύνει ένα φοιτητή να χρησιμοποιήσει γεωμετρικά μοντέλα και να δώσει ενορατικές (visual) λύσεις μελετώντας τους συλλογισμούς και τις αιτιολογήσεις που δόθηκαν.

Επεισόδιο 1: Ο ρόλος των δυναμικών μοντέλων στην εξέλιξη των αντιλήψεων

Η δραστηριότητα που τέθηκε αρχικά αφορούσε την κατασκευή διαφορετικών τετραπλεύρων με σταθερή περίμετρο 14 εκ. και την σύγκρισή τους με βάση το εμβαδόν τους. Τα σχήματα που κατασκεύασαν οι φοιτητές ήταν κυρίως ορθογώνια παραλληλόγραμμα και το τετράγωνο και ο υπολογισμός του εμβαδού των σχημάτων έγινε με βάση τους τύπους υπολογισμού που ανακαλούσαν από τη σχολική τους γνώση. Η εμμονή αυτή των μαθητών στην κατασκευή μόνο ορθογωνίων και τετραγώνων τάση οφείλεται πιθανόν στο φαινόμενο των καθιερωμένων μορφών σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές αναζητούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα σχημάτων για να χαρακτηρίσουν κατηγορίες σχημάτων (Hershkowitz, 1989). Ειδικότερα στην περίπτωση των τετραπλεύρων θεωρούν τα ορθογώνια και το τετράγωνο σαν τα κυρίαρχα σχήματα της κατηγορίας αυτής. Από την άλλη μεριά η αδυναμία κατασκευής και άλλων διαφορετικών σχημάτων πιθανόν οφειλόταν στην έλλειψη γνώσης των τύπων υπολογισμού του εμβαδού άλλων σχημάτων. Αυτό υποστηρίζεται επιπλέον από το γεγονός ότι κάποιοι μαθητές που πρότειναν την κατασκευή ενός τραπεζίου, αδυνατούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν του προκειμένου να το συγκρίνουν με τα υπόλοιπα σχήματα.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να διερευνήσουν το κατά πόσο ήταν δυνατή η κατασκευή διαφορετικών τετραγώνων με σταθερή περίμετρο 14 εκ. "Πόσα διαφορετικά τετράγωνα θα μπορούσατε να κατασκευάσετε;" Οι αιτιολογήσεις για τη μοναδικότητα του τετραγώνου με σταθερή περίμετρο βασίζονταν κυρίως σε αλγεβρικές λύσεις υπολογισμού της μοναδικής τιμής που μπορεί να έχει ένα τετράπλευρο με ίσες πλευρές και σταθερή περίμετρο. Παρεμβαίνοντας ο δάσκαλος τροποποιεί τη δραστηριότητα ζητώντας από τους φοιτητές να διερευνήσουν το κατά πόσο το τετράγωνο είναι το μόνο τετράπλευρο με 4 ίσες πλευρές. "Θα μπορούσατε να κατασκευάσετε άλλα τετράπλευρα που να έχουν 4 ίσες πλευρές;" Έτσι οι μαθητές άρχισαν να μελετούν και την περίπτωση του ρόμβου και να διερευνούν συσχετίσεις μεταξύ του ρόμβου και του κύβου. Οι συσχετίσεις που κατασκεύασαν αρχικά βασίζονταν στη μορφή των σχημάτων και στη συνέχεια στις ισότητες των πλευρών. Ο ρόλος των γωνιών στη δημιουργία των δύο διαφορετικών σχημάτων άρχισε να γίνεται εμφανής με τη συσχέτιση των σχημάτων με κριτήριο το εμβαδόν. Οι φοιτητές εξαιτίας της αδυναμίας τους να εφαρμόσουν τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού του ρόμβου, βασίστηκαν στη διαισθητική τους σκέψη και κατασκεύασαν ένα δυναμικό μοντέλο το οποίο τους βοήθησε να αντιληφθούν διαισθητικά ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ρόμβου με σταθερή περίμετρο. Μέσα από την μελέτη δυναμικών μετασχηματισμών του ρόμβου μεταβάλλοντας τις γωνίες του οι φοιτητές άρχισαν να αντιλαμβάνονται το τετράγωνο σαν μια ειδική περίπτωση ρόμβου. Επιπλέον, μέσα από τη μελέτη ακραίων περιπτώσεων αυτών των δυναμικών μετασχηματισμών αντιλαμβάνονται διαισθητικά ότι το τετράγωνο θα είναι εκείνη η περίπτωση του ρόμβου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Οι συσχετίσεις μεταξύ του ρόμβου και του τετραγώνου αποτέλεσε τη βάση της διερεύνησης και της κατασκευής ιεραρχικών ταξινομήσεων μεταξύ των τετραπλεύρων γενικότερα. Μέσα από τη μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων αναζητήθηκαν τρόποι ταξινόμησης των τετραπλεύρων από γενικότερες κατηγορίες όπως τα κυρτά και μη κυρτά τετράπλευρα, σε ειδικότερες όπως τα ορθογώνια, πλάγια και τραπέζια. Παρ' όλα αυτά οι ταξινομήσεις που κατασκευάζουν οι φοιτητές βασίζονται στη διαισθητική προσέγγιση των κατηγοριών. Μια ενδεικτική ταξινόμηση των τετραπλεύρων που κατασκεύασαν οι φοιτητές είναι η ακόλουθη:



Αναλύοντας τις ενέργειες των φοιτητών μέσα από την εξέλιξη της δραστηριότητας διαπιστώνουμε πιθανές αλλαγές στις αντιλήψεις τους για τα τετράπλευρα και στις αιτιολογήσεις τους. Μολονότι αρχικά οι φοιτητές αντιλαμβάνονται τα τετράπλευρα ολιστικά και στις αντιλήψεις τους κυριαρχεί η μορφή του σχήματος σαν ολότητα, στη συνέχεια προσεγγίζουν τη δραστηριότητα διαισθητικά και κατασκευάζουν δυναμικά μοντέλα που τους δίνουν τη δυνατότητα να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ του σχήματος και των ιδιοτήτων του και μεταξύ διαφορετικών σχημάτων κατασκευάζοντας ιεραρχικές ταξινομήσεις των τετραπλεύρων. Η πορεία της δραστηριότητας, η επικοινωνία που αναπτύσσεται μεταξύ του ερευνητή και των φοιτητών, καθώς και οι ενέργειες των φοιτητών συνθέτουν ένα μαθησιακό περιβάλλον. Η επίδραση αυτού του περιβάλλοντος γίνεται εμφανής στην εξέλιξη των αντιλήψεων των φοιτητών που βασιζόμενοι στη διαισθητική τους σκέψη και συνδυάζοντάς την με τις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους αναπτύσσουν τα γνωστικά στους σχήματα.

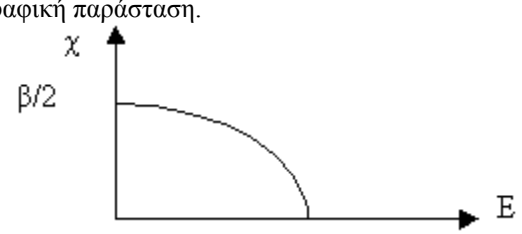
Επεισόδιο 2: Αλληλεπίδραση διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι φοιτητές καλούνται να σχεδιάσουν αρχικά το ανάπτυγμα ενός κουτιού. Για να διευκολυνθούν στην κατασκευή τους δόθηκε ένα διαβαθμισμένο (μιλιμετρέ) συγκεκριμένων διαστάσεων χαρτί. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να διερευνήσουν πώς μεταβάλλεται η επιφάνεια του κουτιού που έχουν σχεδιάσει.

Οι φοιτητές προβληματίζονται πάνω σε μια πραγματική κατάσταση, της οποίας η επίλυση δε φαίνεται να απαιτεί την ενεργοποίηση «τυπικών» μαθηματικών γνώσεων, ανάκληση τύπων και ορισμών. Επιπλέον δεν είναι περίπτωση που θα μπορούσε να αναγνωρισθεί από τους φοιτητές σαν αναπαραγωγή συγκεκριμένης μεθόδου επίλυσης, σαν εφαρμογή διδαγμένης θεωρίας. Η φύση της διδακτικής προσέγγισης, όπως αυτή τίθεται από την πλευρά του διδάσκοντος και ο τρόπος με τον οποίο ο ίδιος χειρίζεται το πρόβλημα με τους φοιτητές συνεπικουρούν στην ανάδειξη μιας σειράς στοιχείων τα οποία την χαρακτηρίζουν.

Οι διαφορετικές ομάδες φοιτητών παρουσίασαν τη δουλειά τους στις άλλες ομάδες συζητώντας τις λύσεις με τις οποίες είχαν προσεγγίσει το πρόβλημα, ενώ η σειρά με την οποία αυτές παρουσιάστηκαν στον πίνακα ευνόησε το σταδιακό πέρασμα από τις εμπειρικές και διαισθητικές σκέψεις σε πιο εξελιγμένες, αφαιρετικές. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκε αρχικά με ποιο τρόπο το ορθογώνιο χαρτί που είχαν στη διάθεσή τους θα μπορούσε να μετατραπεί σε ανάπτυγμα ενός κουτιού. Σ' αυτή τη φάση κατανόησης του προβλήματος παρουσιάζονται οι αντιλήψεις τους σχετικά με το τι είναι επίπεδο σχήμα και τι στερεό, τι είναι επιφάνεια, εμβαδόν, όγκος. Στη συνέχεια, αποφάσισαν να κόβουν ίσα τετράγωνα από τις τέσσερις «γωνίες» του ορθογωνίου και τη διάσταση του τετραγώνου συμφώνησαν να την ονομάζουν χ.

Η πρώτη ομάδα εκφράστηκε μέσα από τη διαισθητική προσέγγιση «*μειώνεται κατά πολύ περισσότερο η επιφάνεια από ότι αυξάνεται το χ*». Η επόμενη ομάδα προχώρησε σε αριθμητικές λύσεις δίνοντας τιμές στο χ και κάνοντας τους υπολογισμούς: *«Συνολικά η επιφάνεια που μειώνεται στην αρχή είναι 4 επί 16. Μετά πάει επί 36...»* Η επόμενη ομάδα οδηγείται σε μια γενίκευση «*Διπλασιάζουμε το μήκος και βλέπουμε ότι τετραπλασιάζεται η επιφάνεια*». Κατόπιν διατυπώνεται η άποψη να δοθούν τιμές στη σχέση $4.\chi^2$ χ=1, χ=2, χ=3. Εδώ η διδάσκουσα συζητά με τις ομάδες των φοιτητών δυο θέματα που προκύπτουν: πόσες το πολύ τιμές θα μπορούσε να πάρει το χ και ποιες είναι αυτές. Στο τέλος μια ομάδα φοιτητών προτείνει μια γραφική παράσταση.



Δ: Γιατί στο πρώτο τεταρτημόριο;

Φ: Είναι το εμβαδόν του αρχικού χαρτιού. Επειδή συνεχώς αφαιρούμε την ποσότητα χ^2 η γραφική παράσταση θα πηγαίνει προς τα κάτω. Επιπλέον οι τιμές που παίρνει το χ^2 είναι θετικό, επομένως και το $4.\chi^2$ θα είναι θετικό. Η χ^2 είναι παραβολή.

Σ' αυτή την περίπτωση όπου η μελέτη της συνάρτησης ουσιαστικά μεταμορφώνεται από διαισθητική και ποιοτική σε μελέτη με τη χρήση της ανάλυσης, τέθηκε το θέμα των ακρότατων σημείων της συνάρτησης. Ένας φοιτητής προσπαθεί να δώσει λύση χρησιμοποιώντας παραγώγους (ίσως ο μοναδικός που κατέχει αυτή τη γνώση) ενώ στη συζήτηση στην τάξη οι φοιτητές προσπαθούν να βγάλουν συμπεράσματα από τη γραφική παράσταση παίρνοντας υπόψη τους περιορισμούς που θέτει το πραγματικό πρόβλημα. Για παράδειγμα, η συζήτηση με όλες τις ομάδες αναδεικνύει τον ισχυρισμό ότι το ελάχιστο εμβαδόν Ε δεν θα γίνει ποτέ μηδέν, αντίθετα «θα μείνει στο τέλος μια λωρίδα. Αυτό είναι όταν όπου χ το β/2» (β είναι το πλάτος του αρχικού χαρτιού).

Το δεύτερο πρόβλημα που καλούνται οι φοιτητές να αντιμετωπίσουν αμέσως μετά είναι το πώς μεταβάλλεται ο όγκος του στερεού, του κουτιού δηλαδή που έχουν σχεδιάσει, σε σχέση με το χ. Οι ομάδες συζήτησαν και εργάστηκαν σ' ένα πλαίσιο παρόμοιο με του προηγούμενου προβλήματος, έχοντας ήδη την εμπειρία της προηγούμενης αναζήτησης της μεταβολής της επιφάνειας. Αποφάσισαν ότι στους προηγούμενους υπολογισμούς τους θα έπρεπε να συνυπολογίσουν και την τρίτη διάσταση. Ο τρόπος με τον οποίο διαδέχτηκαν οι λύσεις η μία την άλλη κατά την παρουσίασή τους στον πίνακα ανέδειξε την εξέλιξη της σκέψης των φοιτητών. Για παράδειγμα, η πρώτη προσέγγιση της λύσης του προβλήματος είχε και πάλι μια ποιοτική μορφή εκφραζόμενη μέσα από ένα γενικό συμπέρασμα, στο οποίο η ομάδα οδηγήθηκε από τους υπολογισμούς της, «*μέχρι ενός σημείου ο όγκος του ορθογωνίου αρχίζει και αυξάνεται, μετά ο όγκος του ορθογωνίου αρχίζει και ελαττώνεται*». Η συζήτηση που δημιουργήθηκε σχετικά με τις τιμές που δόθηκαν από τις διάφορες ομάδες και τους τυχόν περιορισμούς που εμφανίστηκαν κατά την επεξεργασία των λύσεων, οδήγησε στην παρουσίαση της δουλειάς μιας άλλης ομάδας στον πίνακα. Οι φοιτητές αυτοί κατέγραψαν πιο συστηματικά τη μεταβολή του όγκου δίνοντας διαδοχικές τιμές στο ύψος και το μήκος και υπολογίζοντας τους όγκους, επιβεβαιώνοντας την αρχική ιδέα και διαμορφώνοντάς την μέσα από την ποσοτική προσέγγιση. Μέσα από την προσπάθεια να ολοκληρωθεί η λύση η διδάσκουσα συζήτησε μαζί τους το είδος των τιμών που δόθηκαν και αναζητήθηκαν και οι ενδιάμεσες τιμές.

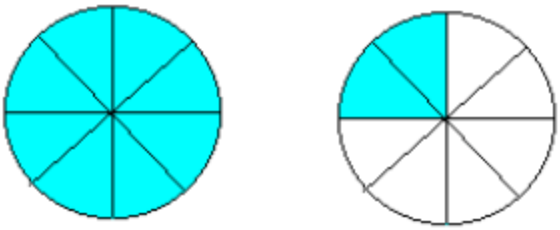
Το συγκεκριμένο επεισόδιο μας δείχνει τη μορφή επικοινωνίας μέσα από το χειρισμό των διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης των φοιτητών από την πιο «στοιχειώδη» στην πιο «προχωρημένη». Παρόλο που δεν είναι στόχος μας να δώσουμε έναν κανόνα που να χαρακτηρίζει μια επικοινωνία ως επιτυχή, υπήρχαν περιπτώσεις όπου ο ενθουσιασμός του διδάσκοντα από μια προτεινόμενη μη αναμενόμενη μαθηματική λύση που ήταν πέρα από τις δυνατότητες των περισσοτέρων φοιτητών οδήγησε πολλές φορές σε ένα αδιέξοδο. Αυτό το αδιέξοδο εκφράστηκε κύρια μέσα από τα αρνητικά συναισθήματα των φοιτητών όπως απογοήτευση και χάσιμο του ενδιαφέροντος.

Επεισόδιο 3: Διαισθητικές προσεγγίσεις θεμελιωδών εννοιών της ανάλυσης

Στους φοιτητές δόθηκε το εξής πρόβλημα:

"Αν έχετε ένα κλάσμα και προσθέτετε ένα σταθερό αριθμό στον αριθμητή και τον ίδιο αριθμό στον παρανομαστή, πώς θα μεταβάλλεται το κλάσμα; Που θα φτάσετε τελικά;"

Εδώ θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε δύο τρόπους λύσης ενός φοιτητή ο οποίος χρησιμοποίησε γεωμετρικά μοντέλα για να εκφράσει τη σκέψη του. Ο συγκεκριμένος φοιτητής, στην προσπάθειά του να δείξει ότι το αρχικό κλάσμα τείνει στη μονάδα, χρησιμοποίησε ένα γεωμετρικό μοντέλο απεικόνισης του 10/8.



Το κλάσμα αυτό το είδε σαν 8/8 και 2/8 και σχεδίασε δύο κύκλους χωρισμένους σε 8 ίσα μέρη (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα). Τα 10/8 γι' αυτόν, ήταν ένας κύκλος και δύο κομμάτια από το δεύτερο. Ο φοιτητής τόνισε ότι αν προσθέτει το 2 σε αριθμητή και παρανομαστή, τα 2 κομμάτια που παίρνουμε από το δεύτερο κύκλο, είναι σταθερά σαν αριθμός και ανεξάρτητα από τις αλλεπάλληλες προσθέσεις. Ταυτόχρονα "είδε" ότι το μέγεθος των δύο αυτών κομματιών ολοένα και μικραίνει αν συνεχίσουμε τη διαδικασία:

('Δ' είναι η διδάσκουσα, 'Γ' ο φοιτητής στον οποίο αναφερόμαστε)
Γ. Η ποσότητά του μένει σταθερή, δηλαδή αν έχουμε έναν κύκλο 10…δια 8 μας δίνει έναν κύκλο και δύο κομματάκια απ' τον επόμενο. Στα 12/10 πάλι μας δίνει έναν κύκλο και δύο κομματάκια απ' τον επόμενο. Απλά η ποσότητα εδώ πέρα, δηλαδή… το ποσό του κομματιού του κύκλου,
Δ. Τι είναι; Μικρότερο;
Γ. Ναι, μικρότερο. Άρα δηλαδή τι σημαίνει; Το επόμενο κλάσμα δηλαδή τα 12/10 θα είναι μικρότερο από αυτό εδώ πέρα.
Δ. Ωραία. Που θα τείνει λοιπόν;
Γ. Αυτά; Που τείνουν; …Τείνουν στη μονάδα.

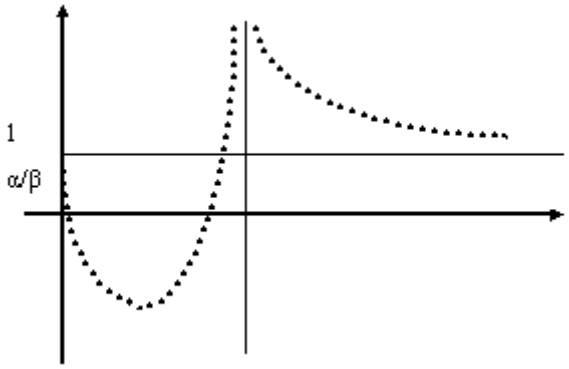
Στην προσπάθειά μας να ρίξουμε φως στον τρόπο σκέψης του φοιτητή αυτού, βλέπουμε ότι χρησιμοποιεί ένα απλό και διαδεδομένο τρόπο απεικόνισης κλασμάτων (τον κύκλο), που όμως φέρνει στην επιφάνεια μια διορατική ικανότητα πολύτιμη για την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Η ευχέρεια που επέδειξε στο να μικραίνει νοερά το εμβαδόν των δύο κομματιών του δεύτερου κύκλου, δείχνει ικανότητα στο να χρησιμοποιεί την εξεικόνιση (visualisation) μέσα από δυναμικές εικόνες (dynamic images) με στόχο την κατανόηση αφηρημένων εννοιών.

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο φοιτητής αυτός χρησιμοποίησε παρόμοιο τρόπο και για να αποδείξει ότι τέτοιες ακολουθίες μη καταχρηστικών κλασμάτων τείνουν και αυτές στη μονάδα. Κατασκεύασε έναν κύκλο αναπαριστώντας τα 5/8 και παρόμοια έδειξε μέσα από αλλεπάλληλες προσθέσεις του 2 στον αριθμητή και παρανομαστή ότι το εμβαδόν των τριών κομματιών που απομένουν τείνει στο μηδέν. Το γεγονός ότι αναπροσάρμοσε το ίδιο μοντέλο σκέψης σε ελαφρώς διαφορετικό πρόβλημα μας κάνει να ισχυριστούμε ότι είναι δείγμα ελαστικότητας της σκέψης του φοιτητή (Gray και Tall 1994).

Η διδάσκουσα-ερευνήτρια ρώτησε επίσης τι συμβαίνει αν αντί να προσθέτουμε, αφαιρούμε σταθερό αριθμό και ειδικά τι θα συμβεί αν κατά τις συνεχείς αφαιρέσεις εμφανιστεί μηδέν στον παρανομαστή:

('Κ' άλλος ένας φοιτητής που συμμετέχει στη συζήτηση)
Δ. Αν ο παρανομαστής γίνει μηδέν τι γίνεται;
...
[καμιά απάντηση από τους φοιτητές]
Δ. Αν ο παρανομαστής γίνει μηδέν γίνεται πάρα πολύ μεγάλο
Κ. Αν φτάσω στο σημείο που θα είναι από κάτω το μηδέν θα σταματήσω εκεί;
Γ. Εγώ έχω κάνει μία γραφική παράσταση σύμφωνα με την οποία ξεκινάει από κάποιον θετικό αριθμό, θα μηδενιστεί, θα πάρει αρνητική τιμή το κλάσμα, από κει και πέρα πάλι θα μηδενιστεί, θα φτάσει στο άπειρο, είναι μια διακεκομμένη γραφική παράσταση, μόλις φτάσει στο άπειρο…από το άπειρο πάλι θα ξαναπέσει σε κάποια τιμή πλέον…εε…τι βρήκαμε εδώ. Αρνητικά…
Δ. Θα αρχίσει να κατεβαίνει;
Γ. Ναι. Και τότε πλέον θα τείνει να φτάσει στη μονάδα.
Δ. Λες να τη φτάσει;
Γ. Θα πλησιάσει…

Στην περίπτωση αυτή, είδαμε ότι ο φοιτητής προσέγγισε την έννοια του ορίου ξανά μέσα από μια εικόνα, αντί να εργαστεί με τύπους και αριθμούς. Σ' αυτή την περίπτωση όμως διακρίνουμε μια διάθεση εκ μέρους του φοιτητή αυτού να "ανέβει" σε επίπεδα αφαίρεσης και να χρησιμοποιήσει περισσότερο γνώσεις στο χώρο της ανάλυσης.



Σχεδιάζει όπως παρατηρούμε με επιτυχία την γραφική παράσταση ακολουθίας –σημεία– η οποία ανεβαίνει ασυμπτωτικά στο άπειρο και όταν "ξαναπέσει" τείνει ασυμπτωτικά στο τελικό της όριο, τη μονάδα. Η γραφική παράσταση αυτή, απαιτεί για την σχεδίασή της όχι μόνο ικανότητες να συλλάβει και να απεικονίσει κανείς την αφηρημένη έννοια του απείρου, αλλά και γνώσεις ανάλυσης για το σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων ακολουθιών και ειδικά συγκλινουσών ακολουθιών με χρήση ασυμπτώτων.

Ο φοιτητής αυτός, ξεκινώντας από ένα γεωμετρικό μοντέλο (τους κύκλους) και μέσα από την ικανότητά του να χρησιμοποιεί δυναμικές νοητικές εικόνες κατέληξε επιστρατεύοντας αφενός τη διαίσθησή του και αφετέρου τις μαθηματικές του γνώσεις από ανάλυση, σε μία αναλυτικής φύσεως λύση και αιτιολόγηση του προβλήματος. Θα μπορούσαμε σύμφωνα με την Presmeg (1986) να κατατάξουμε τον φοιτητή στην κατηγορία αυτών που χρησιμοποιούν εξεικόνιση για επίλυση προβλημάτων (visualisers). Επίσης, μέσα από το επεισόδιο που έχουμε αναφέρει, φαίνεται ίσως η αλληλεπίδραση της αναλυτικής σκέψης και της ικανότητας για εξεικόνιση που όπως υποστηρίζουν οι Zazkis Dubinsky και Dautermann (1996) οδηγεί σε μια νοερή εικόνα η οποία εκφράζει μια σύγκλιση των δύο διαφορετικών τρόπων σκέψης.

Δεν είναι εύκολο να δούμε τι είναι αυτό που έδρασε στο φοιτητή ώστε να φθάσει τελικά σ' αυτό το υψηλό επίπεδο σκέψης. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η φύση της δραστηριότητας και οι ερωτήσεις που είχαν στόχο τη διαλεύκανση ακραίων καταστάσεων ενεθάρρυναν το συγκεκριμένο φοιτητή να επικαλεστεί το γεωμετρικό μοντέλο, να αξιοποιήσει την ικανότητα του να το μεταβάλλει δυναμικά και να συνδυάσει τα παραπάνω με βάσει τις μαθηματικές του γνώσεις και εμπειρίες, ώστε να αντεπεξέλθει στις απαιτήσεις αυτού του προβλήματος.

Συμπεράσματα

Μέσα από την ανάλυση των διδακτικών καταστάσεων φάνηκε ότι το όλο περιβάλλον επέτρεψε στους φοιτητές να εκφράσουν τις αντιλήψεις τους , να αναπτύξουν τις στρατηγικές τους και να διατυπώσουν τους συλλογισμούς τους. Η φύση της δραστηριότητας, η συνεχής εξέλιξή της, το διαφορετικό μαθηματικό υπόβαθρο των φοιτητών καθώς και η μορφή της επικοινωνίας που αναπτύχθηκε, επέτρεψε την εμφάνιση διαφορετικών επιπέδων μαθηματικής σκέψης. Και στις τρεις καταστάσεις βλέπουμε μια εξέλιξη του είδους της γνώσης που παράχθηκε στην τάξη από εμπειρική, ενορατική (visual) και διαισθητική σε πιο αναλυτική και τυπική. Θα ήταν δύσκολο να εξετάσουμε το βαθμό που αυτή η εξέλιξη επιτυγχάνεται για τον κάθε φοιτητή σε ατομικό επίπεδο όμως θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι αυξάνεται η δυνατότητα να προσεγγίσει αυτό το ρυθμό εξέλιξης (η ζώνη της πλησιέστερης ανάπτυξης, Vygotsky, 1986).

Η Γεωμετρία αντιμετωπίζεται όχι μόνο ως ένα εργαλείο που επιτρέπει την ανάπτυξη επαγωγικών ή παραγωγικών συλλογισμών αλλά και ως ένα μέσο που προκαλεί τη διαίσθηση μέσα από τη δημιουργία δυναμικών προσεγγίσεων. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη διδακτική κατάσταση οι φοιτητές μεταβαίνουν από ολιστικές σε σχεσιακές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας δυναμικούς μετασχηματισμούς. Η χρήση όμως δυναμικών μοντέλων ήταν εμφανής και στην τρίτη κατάσταση όπου απετέλεσαν τη βάση για ενορατικές αιτιολογήσεις και αποδείξεις. Από τις δύο τελευταίες καταστάσεις φαίνεται ότι η γεωμετρία αποτελεί ένα εργαλείο εξέλιξης της εμπειρικής σκέψης σε αναλυτική. Φαίνεται λοιπόν ότι η Γεωμετρία μπορεί να αποτελέσει το πλαίσιο μέσα από το οποίο οι μελλοντικοί δάσκαλοι θα εκφράσουν, θα αξιοποιήσουν και θα εξελίξουν σε ανώτερο επίπεδο τη μαθηματική τους σκέψη.

Αναφορές

Baturo A. and Nason, R. (1996) Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measuement, *Educational Studies in Mathematics , 31*, 235-268.

Behr, M., Harel, G., Post, T and Lesh, R. (1992) Rational Number, Ratio and Proportion, in D.A. Grows (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, (p.p. 296-333), N.C.T.M.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. and Houang, R.T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance, *Educational Studies in Mathematics, 20*, 121-146.

Brown, S. I., Cooney, T. J. & Jones, D. (1992) Mathematics Teacher Education. In W.R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, New York: Macmillan.

Cobb, P. and Steffe, L. P. (1983) The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Davis, R. B., Maher, C. A. and Noddings, N. (1990) Constructivist views on the teaching and learning of Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 4, N.C.T.M.

Eisenhart, M. A. (1988) The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research, *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99-114.

Even, R., Tirosh, D. and Markovits, Z. (1996) Teacher subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: research and development, PME 20, vol.1, 119-134.

Georgiadou, B. and Potari, D. (1998) Exploring Prospective Primary School Teachers' Understanding of Mathematics Through the Development of their Pedagogical Knowledge, International Conference on the Teaching of Mathematics, John Wiley & Sons

Gray, E. and Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 115-141.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. and von Dormolen, J. (1996), Space and Shape, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, C. Laborde (eds.) *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lapan, G., Mitchelmore, M., Vinner, S., (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. Mathematics and Cognition: *Are search Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press, 70- 95.

Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, *Educational Studies in Mathematics, 28,* 91-98, 1995

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness*. Educational Studies in Mathematics , 17,* 297-311.

Πόταρη, Δ. και Σπηλιωτοπούλου, Β. (1999) Ο εποικοδομισμός ως πλαίσιο οργάνωσης προγραμμάτων για την αρχική εκπαίδευση κι επιμόρφωση εκπαιδευτικών, Poster που παρουσιάστηκε στο Συμπόσιο, Σεμινάριο του Κ.Ε.Ε με θέμα Αρχική Εκπαίδευση και Επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού: Σύγχρονες Ερευνητικές προσεγγίσεις, Πάτρα 16-18 Ιουλίου 1999.

Schon, D.A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner*, San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Simon, M.A. (1995) Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective, *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M.A. (1996) Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197-210.

Simon, M.A. and Blume, G. W. (1994) Building and understanding multiplicative relationships: a study of prospective elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5).

Simon, M.A. and Schifter, D. (1991). Towards a Constructivist Perspective: An Intervention Study of Mathematics Teacher Development. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 309-331.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. The Massachusetts Institute of Technology.

Zazkis, R.,Dubinsky, E. and Dautermann, J. (1996) Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.