Η ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Κων/νος Τζανάκης, Μιχάλης Κούρκουλος
Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ρέθυμνο 74100
tzanakis@edc.uoc.gr, mkourk@edc.uoc.gr

Λέξεις Κλειδιά: λογική απόδειξη, επαγωγή, συλλογισμός, πείραμα, σχέση Μαθηματικών και Φυσικής.
Θέμα: Μαθηματική σκέψη και μαθηματικά εργαλεία, Επιστημολογία, φαντασία και οπτικοποίηση, Νοητικά μοντέλα.
Κατηγορία*:* θεωρητική-φιλοσοφική.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με αφετηρία το ερώτημα "ποιες είναι οι απαιτούμενες συνθήκες για να είναι μία μαθηματική πρόταση έγκυρη και άρα αποδεκτή;", ασχολούμαστε με τα εξής:

(α) Προσδιορίζομε τις συνθήκες εγκυρότητας μιας πρότασης στα Μαθηματικά.

(β) Αναλύομε τις συνθήκες αυτές. Αναδεικνύεται έτσι η σημασία της επαγωγής ως μεθόδου σύλληψης και τεκμηρίωσης μιας πρότασης την οποία διακρίνομε σε "πλήρη (πεπερασμένη) επαγωγή", προκειμένου περί προτάσεων που αφορούν σε πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων και σε "εκτεταμένη επαγωγή", προκειμένου περί προτάσεων που αφορούν σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Έτσι, η λογική (απαγωγική) απόδειξη πρότασης της δεύτερης κατηγορίας μπορεί να θεωρηθεί ως η διαδικασία που αντικαθιστά μία πλήρη (άπειρη) επαγωγή, αναδεικνύοντας έτσι τις επαγωγικές διαδικασίες τεκμηρίωσης ως το απαιτούμενο προστάδιο της λογικής απόδειξης, η ενασχόληση με το οποίο μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της αναγκαιότητας της λογικής απόδειξης.

(γ) Αναλύεται η έννοια της "εκτεταμένης επαγωγής", οδηγώντας έτσι σε ένα μεθοδολογικό σχήμα για την εφαρμογή της σε διδακτικό επίπεδο.

Με στόχο να φανούν ευκρινέστερα οι τυχόν ουσιώδεις επιστημολογικές διαφοροποιήσεις των Μαθηματικών από τις εμπειρικές επιστήμες - γεγονός με προφανείς διδακτικές συνέπειες -, τα παραπάνω αναλύονται και στο πλαίσιο της Φυσικής, την οποία θεωρούμε ως την πλησιέστερη προς τα Μαθηματικά εμπειρική επιστήμη.

ABSTRACT

Starting with the question "what are the conditions which make a mathematical proposition valid, hence acceptable?", we are concerned with the following:

(a) We determine the conditions for the validity of a mathematical proposition.

(b) We analyze these conditions so that the importance of inductive methods of conceiving and demonstrating a proposition is revealed. We distinguish between "complete (finite) induction" for propositions refering to a finite number of possibilities and "extended induction" for propositions refering to an infinite number of possibilities. Consequently, the logical (deductive) proof of a proposition of the second kind can be considered as a complete (infinite) induction. In this way, employing inductive methods of justification appears as a necessary stage preceding the logical proof. Consequently, it can be helpful in understanding better the necessity of providing logical proofs of propositions.

(c) The concept of "extended induction" is analyzed leading to a methodological scheme for its application to teaching.

Points (a)-(c) are studied in the context of Physics as well, since the latter is the empirical science closest to Mathematics. We aim at making clearer any essential epistemological differences between Mathematics and the empirical sciences. Evidently, such differences have important didactical implications.

1. Εισαγωγή

Η συνήθης άποψη για το τι είναι Μαθηματικά, ιδιαίτερα διαδεδομένη στην καθημερινή διδακτική πράξη και την κουλτούρα των εκπαιδευτικών, αναφέρεται στο τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας: Μαθηματικά είναι τα αξιώματα, θεωρήματα αποδείξεις κτλ., δηλαδή ό,τι είναι κατασταλαγμένο σε τυπική, απαγωγικά δομημένη μορφή, που έχει ως αφετηρία κάποιες αρχές, τα αξιώματα. Πρόκειται για άποψη έντονα επηρεασμένη από το φορμαλισμό ως φιλοσοφική θέση για τα Μαθηματικά, τις απ' αυτόν απορρέουσες απόψεις του ρεύματος των "Μοντέρνων Μαθηματικών" και γενικότερα το λογικό και εμπειρικό θετικισμό ως φιλοσοφία της επιστήμης (βλ. σχετικά Davis & Hersh 1992, κεφ.7, ιδιαίτερα σελ. 327-328, Brown 1993, σελ.97-98, και από την πλευρά της διδακτικής, Ballachef 1982, Arsac 1987). Από αυτή την σκοπιά τα Μαθηματικά εξαντλούνται πλήρως σ' αυτό που μπορεί να διατυπωθεί ρητά, δηλαδή στα αποτελέσματα τους. Προφανώς το τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας αποτελεί σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών, συνιστώντας τον κύριο όγκο αυτού που αποτυπώνεται από αυτά διαχρονικά, μπορεί να κοινοποιηθεί και να ελεγχθεί υφιστάμενο κριτική ώστε να γίνει τελικά αποδεκτό ή όχι. Όμως, εξ ίσου σημαντική είναι

αυτή καθεαυτή η διαδικασία "κάνω Μαθηματικά", που περιλαμβάνει σύλληψη ιδεών, ανακαλυπτικές ενέργειες, λάθη, οπισθοδρομήσεις στην ανάπτυξη ενός θέματος, λανθασμένες ή ασαφείς αντιλήψεις κτλ (πρβλ. Lakatos 1976, Courant & Robbins 1941, εισαγωγικό σχόλιο, Stewart 1989, Brown 1993 σελ.2, 99). Έτσι, το νόημα των Μαθηματικών γνώσεων δεν καθορίζεται μόνο από το σύνολο των καταστάσεων όπου οι γνώσεις αυτές αποκτούν υπόσταση ως μαθηματικές θεωρίες, αναπτυσσόμενες απαγωγικά, αλλά και από αυτήν καθεαυτήν τη διαδικασία που οδήγησε αρχικά ή μπορεί να οδηγήσει σ' αυτές (πρβλ. Brousseau 1983). Δεχόμενοι λοιπόν τα Μαθηματικά, όχι μόνον ως πληροφοριακό περιεχόμενο, αλλά και ως διαδικασία σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης του περιεχομένου αυτού, σε κάθε προσπάθεια παρουσίασης ή διδασκαλίας τους, τόσο η επιλογή περιεχομένου, όσο και μεθόδου, είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την κατανόηση αυτών των διαδικασιών σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των επί μέρους μαθηματικών γνώσεων. Με τον όρο κατανόηση εννοούμε την ένταξη καινούριων πληροφοριών στο ήδη υπάρχον γνωστικό πλαίσιο του ατόμου και τη δημιουργία διασυνδέσεων μεταξύ των καινούριων αυτών πληροφοριών και των άλλων στοιχείων αυτού του γνωστικού πλαισίου[1]. Έτσι, οι νέες γνώσεις αποκτούν νόημα και σημασία για το άτομο, δίνοντάς του τη δυνατότητα να τις χρησιμοποιήσει στην απάντηση ερωτημάτων, επίλυση προβλημάτων και γενικότερα την οργάνωση της σκέψης του (πρβλ. Hadamard 1954, Penrose 1997). Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι το γεγονός ότι η προαναφερθείσα επιστημολογική άποψη δεν περιορίζεται μόνον στα Μαθηματικά, αλλά αφορά σε κάθε επιστημονικό πεδίο στο χώρο των θετικών επιστημών, επιδεχόμενο απαγωγική οργάνωση και παρουσίαση, ιδιαίτερα δε στη Φυσική.

Προκύπτουν έτσι δύο διαφορετικά μεν, αλλά αλληλένδετα ερωτήματα:

• *Ερώτημα* **1**: Ποιες είναι αυτές οι διαδικασίες που οδηγούν στην σύλληψη, τεκμηρίωση και οργάνωση της νέας γνώσης;

• *Ερώτημα* **2**: Ποιες είναι οι απαιτούμενες συνθήκες για να είναι αυτή η νέα γνώση έγκυρη και (άρα) αποδεκτή;

Σε άλλες εργασίες (Τζανάκης 1998α, 1998β, Τζανάκης & Κούρκουλος 1998) έχει μελετηθεί το ερώτημα 1. Πολύ συνοπτικά, οι διαδικασίες αυτές χωρίζονται σχηματικά σε:

- συλλογιστικές διαδικασίες, χωριζόμενες σε απαγωγικούς, επαγωγικούς και αναλογικούς συλλογισμούς,
- πειραματικές διαδικασίες,
- αλγοριθμικές διαδικασίες.

Τονίζομε όμως το γεγονός ότι στην καθημερινή ερευνητική ή διδακτική δραστηριότητα εμφανίζονται συνήθως μικτές μορφές των διαδικασιών αυτών που χωρίστηκαν εδώ για μεθοδολογικούς λόγους. Από την άλλη και σε σχέση με το ερώτημα 2, οι διαδικασίες αυτές μπορεί να έχουν είτε ανακαλυπτικό, είτε αποδεικτικό και τεκμηριωτικό χαρακτήρα.

Στην παρούσα εργασία θα εξετάσομε τη δεύτερη αυτή πλευρά της επιστημονικής διαδικασίας στα Μαθηματικά, ιδιαίτερα δε σε σύγκριση με τη Φυσική ως την πλησιέστερη στα Μαθηματικά πειραματική επιστήμη, γεγονός που θα μας επιτρέψει να δούμε καθαρότερα τις τυχόν ιδιαιτερότητες των Μαθηματικών και ειδικότερα τα σημεία εκείνα που από τη σκοπιά του ερωτήματος 2, αποτελούν την ειδοποιό διαφορά μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής.

Από διδακτικής πλευράς η μελέτη του θέματος αυτού έχει ενδιαφέρον διότι:

(α) Μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό των εγγενών χαρακτηριστικών των Μαθηματικών που επάγουν δυσκολίες στο να γίνουν τούτα αποδεκτά από τους διδασκόμενους.

(β) Μπορεί να δώσει ιδέες για τρόπους ενεργοποίησης του ενδιαφέροντος του διδασκομένου για τα Μαθηματικά, δηλαδή, ερωτήματα και τρόπους προσέγγισης και τεκμηρίωσης της απάντησης σ' αυτά, ώστε η νέα γνώση στην οποία πιθανώς οδηγούν τούτα να έχει νόημα για το διδασκόμενο.

(γ) Επιτρέπει τη βαθύτερη κατανόηση των τυχόν διαφορών μεταξύ Μαθηματικών και εμπειρικών επιστημών, που σε στοιχειώδες επίπεδο (Α΄ βάθμιας και Β΄ βάθμιας εκπαίδευσης) δεν είναι προφανείς ούτε για το μαθητή, που συχνά δεν κατανοεί για ποιόν λόγο χρειάζεται η απόδειξη, ούτε για το διδάσκοντα που δεν ξέρει πώς να χειριστεί τις διαφορές αυτές ώστε να δώσει πειστική απάντηση στην προαναφερθείσα απορία του μαθητή.

Βάσει των παραπάνω, η εργασία δομείται ως εξής: Στο μέρος 2 εξετάζονται οι βασικές συνθήκες εγκυρότητας μιας πρότασης στα Μαθηματικά και τη Φυσική. Στο μέρος 3 εξετάζεται λεπτομερέστερα η διαδικασία τεκμηρίωσης μιας πρότασης στις δύο επιστήμες, γεγονός που αναδεικνύει την κεντρική σημασία των επαγωγικών συλλογισμών και στις δύο, κάνοντας διάκριση ανάμεσα στην "πλήρη επαγωγή" (στις περιπτώσεις που έχομε πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων) και στην "εκτεταμένη επαγωγή" (στις περιπτώσεις που έχομε άπειρο πλήθος ενδεχομένων). Στο πλαίσιο αυτό, η απαγωγική (λογική) απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως η διαδικασία που αντικαθιστά μία πλήρη επαγωγή που αφορά σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων, ενέχοντας ταυτόχρονα προτάσεις που αναφέρονται σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Επισημαίνεται έτσι το γεγονός ότι μεταξύ απαγωγικών και επαγωγικών συλλογισμών δεν υπάρχει η αγεφύρωτη απόσταση που συνήθως θεωρούμε. Τούτο έχει ενδιαφέρον τόσο επιστημολογικά, καθιστώντας σαφή τη σχέση Μαθηματικών και εμπειρικών επιστημών από τη σκοπιά του ερωτήματος 2, όσο και διδακτικά, δείχνοντας ότι η κατανόηση της αναγκαιότητας της λογικής απόδειξης φαίνεται να περνά μέσα από την εξοικείωση με επαγωγικές μεθόδους τεκμηρίωσης. Στο μέρος 4 αναλύεται η έννοια της "εκτεταμένης επαγωγής" που περιγράφηκε στο μέρος 3 και στο μέρος 5 συνοψίζονται τα συμπεράσματα των προηγουμένων παραγράφων.

[1] Πρβλ. Hiebert & Carpenter 1992, p.67, Poincaré 1996. Για πληρέστερη ανάλυση του σημείου αυτού, βλ. Sierpinska 1994, Hiebert & Carpenter 1992.

2. Η εγκυρότητα μιας πρότασης στα Μαθηματικά και τη Φυσική

Στο πλαίσιο οποιασδήποτε επιστήμης, το ερώτημα 2 της παρ.1, που σε σύντομη μορφή είναι[2] "Τι θεωρείται αληθές και πώς τεκμηριώνεται η αλήθεια του ώστε να είναι αποδεκτή;", είναι θεμελιώδες καθώς μια απάντηση αφ' ενός εκφράζει και το βασικό σκοπό μιας επιστήμης ως ερευνητικού πεδίου (πρβλ. Flato 1993) και αφ' ετέρου καλλιεργεί στάσεις και απόψεις για την επιστήμη αυτή σε διδακτικό επίπεδο. Αναφορικά με το ερώτημα αυτό στα Μαθηματικά και τη Φυσική, θα μπορούσαμε να πούμε τα εξής: κάθε μαθηματικός θα συμφωνούσε αυθόρμητα ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αλήθεια μιας πρότασης στα Μαθηματικά, είναι η δυνατότητα λογικής επαλήθευσης της από κάποιες, λογικά μη αντιφατικές μεταξύ τους αρχές (αξιώματα). Αντίστοιχα, ένας φυσικός, ως τέτοια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αλήθεια μιας πρότασης στην Φυσική, θα θεωρούσε αυθόρμητα, την συμβατότητα (με την έννοια της μη αντιφατικότητας) της πρότασης με τα εκάστοτε εμπειρικά ή πειραματικά δεδομένα. Κατά συνέπεια, η αλήθεια ή μη μιας πρότασης για ένα φυσικό, έχει σχετικό ως προς τον χρόνο χαρακτήρα· μελλοντική αλλαγή των δεδομένων, μπορεί να αναιρέσει την κατά την παρούσα χρονική στιγμή αλήθεια ή μη της πρότασης.

Στο Τζανάκης & Κούρκουλος 1998 παρ.8, με βάση ιστορικώς σημαντικά παραδείγματα, έχει υποστηριχθεί επαρκώς ότι αν και οι παραπάνω συνθήκες (λογική επαληθευσιμότητα (αντ. πειραματική συμβατότητα)) είναι ικανές για την αλήθεια μιας πρότασης στα Μαθηματικά (αντ. Φυσική), δεν φαίνεται να είναι και αναγκαίες καθώς υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν την αποδοχή μιας πρότασης ως αληθούς. Παρ΄ όλα αυτά, οι παραπάνω συνθήκες αποτελούν το βασικό στοιχείο για να είναι κοινοποιήσιμη μια πρόταση στην ευρύτερη επιστημονική κοινότητα ως αληθής ή ψευδής και όχι ως (έστω ισχυρή) εικασία ή υπόθεση. Κατά συνέπεια είναι το βασικό κριτήριο για τη διασφάλιση της εγκυρότητας της πρότασης στο πλαίσιο της συγκεκριμένης επιστήμης, άρα και για την επίσημη αποδοχή της από την αντίστοιχη επιστημονική κοινότητα. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες αυτές είναι ουσιώδεις και κατά τη μετάπλαση των προτάσεων αυτών για διδακτικούς σκοπούς.

Από την άλλη έχει υποστηριχθεί μέσω ιστορικής ανάλυσης η θέση ότι Μαθηματικά και Φυσική είχαν πάντα μια στενή σχέση γόνιμης αλληλοτροφοδότησης με ιδέες, έννοιες και μεθόδους, με τρόπον ώστε να πρέπει να ειδωθούν ως δύο διαφορετικοί μεν, αλλά συμπληρωματικοί τρόποι θεώρησης της ίδιας (νοητικής ή εμπειρικής) πραγματικότητας (Τζανάκης 1999, Τζανάκης & Κούρκουλος 1998, πρβλ Τζανάκης 1996). Επί πλέον, και προς ενίσχυση της παραπάνω θέσης, μια συστηματική επιστημολογική ανάλυση των επιστημονικών διαδικασιών που εφαρμόζονται (και αναφέρθηκαν στην παρ.1), του χαρακτήρα των ερωτημάτων που τίθενται και των ειδών των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται στο πλαίσιο των δύο επιστημών, έδειξε ότι στο επίπεδο αυτό δε φαίνεται να υπάρχουν ουσιώδεις διαφορές μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής (Τζανάκης & Κούρκουλος 1998 παρ.5-8). Τέτοιες διαφορές αφορούν στους τρόπους πιστοποίησης της εγκυρότητας μιας πρότασης όπως περιγράφηκαν στην αρχή αυτής της παραγράφου: **λογική επαληθευσιμότητα** από λογικά μη αντιφατικές μεταξύ τους αρχές, για τα Μαθηματικά και **πειραματική συμβατότητα** για τη Φυσική.

Όμως με δεδομένο το γεγονός ότι σε ερευνητικό επίπεδο η μεν Φυσική χρησιμοποιεί ευρύτατα λογικές συνεπαγωγές για την αποδοχή προτάσεων (π.χ. οποιαδήποτε μαθηματική απόδειξη στο πλαίσιο μιας φυσικής θεωρίας), τα δε μαθηματικά χρησιμοποιούν (νοητικά κυρίως) πειράματα, όχι μόνο για την ισχυροποίηση εικασιών και υποθέσεων αλλά και για την επικύρωση ή τη διάψευση μιας πρότασης (π.χ. η κατασκευή αντιπαραδειγμάτων σε μια υπόθεση έχει αυτόν τον χαρακτήρα), προκύπτει φυσιολογικά το

- *Ερώτημα 3*: Υπάρχει (και αν ναι, ποια) σχέση μεταξύ των δύο εκ πρώτης όψεως εντελώς άσχετων μεταξύ τους συνθηκών εγκυρότητας μιας πρότασης στα Μαθηματικά (λογική επαληθευσιμότητα) και στην Φυσική (πειραματική συμβατότητα);

Το ερώτημα αυτό είναι και διδακτικά κρίσιμο καθώς η απάντηση του καθορίζει και τους τρόπους αιτιολόγησης μιας πρότασης στα σχολικά Μαθηματικά ή τη σχολική Φυσική. Για παράδειγμα, με βάση την σημερινή κατάσταση σε ότι αφορά τα Μαθηματικά, έχομε:

- για το Λύκειο, τη λογική (απαγωγική) αιτιολόγηση ως τρόπο τεκμηρίωσης και αποδοχής μιας πρότασης,
- μέχρι το Λύκειο (κυρίως στο Δημοτικό και πολύ συχνά στο Γυμνάσιο) την αποφατική, ή τη βάσει λίγων εμπειρικών ή παρατηρησιακών δεδομένων αποδοχή μιας πρότασης.

Είναι σαφές ότι υπάρχει εδώ ένα μεγάλο μεθοδολογικό άλμα σε ότι αφορά τις μεθόδους τεκμηρίωσης και αποδοχής προτάσεων, που από τη σκοπιά που παρουσιάζεται το θέμα εδώ, οδηγούν στο ερώτημα κατά πόσον υπάρχουν ενδιάμεσες διαβαθμίσεις στη μέθοδο τεκμηρίωσης. Η απάντηση είναι κατά τη γνώμη μας καταφατική και η στήριξή της επιχειρείται στην επόμενη παράγραφο.

3. Η διαδικασία τεκμηρίωσης μιας πρότασης

Ήδη αναφέρθηκε στην παρ.1, ότι τόσο στα Μαθηματικά, όσο και στη Φυσική χρησιμοποιούνται συλλογιστικές διαδικασίες που μπορεί να χωριστούν σε απαγωγικούς, επαγωγικούς και αναλογικούς συλλογισμούς. Όπως έχει αναλυθεί αλλού (Τζανάκης 1998β, Τζανάκης & Κούρκουλος 1998), οι αναλογικοί συλλογισμοί σχετίζονται κυρίως με ανακαλυπτικές ενέργειες, οι απαγωγικοί κυρίως με την τεκμηρίωση προτάσεων (αποτελούν τη μέθοδο λογικής

[2] Οι δύο διατυπώσεις είναι ισοδύναμες στο βαθμό που η αλήθεια μιας πρότασης ταυτίζεται με την εγκυρότητά της. Η διαφοροποίηση των δύο αυτών εννοιών θα μας οδηγούσε σε φιλοσοφικές αναζητήσεις μακριά από τους στόχους του παρόντος κειμένου.

απόδειξης), οι δε επαγωγικοί φαίνεται να παίζουν ένα σημαντικό ρόλο τόσο στις ανακαλυπτικές διαδικασίες (και στα Μαθηματικά και στη Φυσική), όσο και στη διαδικασία τεκμηρίωσης και αποδοχής προτάσεων (στη Φυσική). Εν προκειμένω θα ασχοληθούμε με τα χαρακτηριστικά της τεκμηρίωσης μιας πρότασης με τη βοήθεια απαγωγικών και επαγωγικών συλλογισμών.

Ας θεωρήσομε ως μαθηματικό παράδειγμα τις ακόλουθες προτάσεις:

- (α) Υπάρχουν 25 πρώτοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι από το 100.
- (β) Υπάρχουν άπειροι πρώτοι φυσικοί αριθμοί και ως φυσικό παράδειγμα τις προτάσεις
- (γ) Ο ατμοσφαιρικός αέρας περιέχει οξυγόνο, άζωτο και υδρατμούς.
- (δ) Κάθε στερεό σώμα μέσα στο νερό, υφίσταται μία δύναμη με αντίθετη φορά προς το βάρος του.

Τεκμηρίωση των (α) και (γ): Εξετάζομε όλα τα δυνατά ενδεχόμενα (που εδώ είναι 100 για την (α) και 3 για την (γ)), προσδιορίζοντας όλους τους πρώτους φυσικούς μέχρι το 100 και διαπιστώνοντας έτσι την αλήθεια της, για δε την (γ) απομονώνοντας με κατάλληλη πειραματική διάταξη την ύπαρξη της αντίστοιχης χημικής ένωσης.

Σχόλιο: Εν προκειμένω η εγκυρότητα των προτάσεων εξασφαλίζεται με όμοιο τρόπο: τον έλεγχο όλων των ενδεχομένων (ελέγχω κάθε αριθμό αν έχει γνήσιο διαιρέτη, ή ανιχνεύω με κατάλληλη συσκευή την αντίστοιχη χημική ένωση). Εδώ η τεκμηρίωση έχει a posteriori χαρακτήρα και η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι όμοια, βασισμένη στο κοινό χαρακτηριστικό των δύο προτάσεων, το πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων. Θα την ονομάσομε πλήρη (πεπερασμένη) επαγωγή.

Τεκμηρίωση των (β) και (δ): Πλήρης επαγωγή με a posteriori χαρακτήρα είναι αδύνατη λόγω του ότι έχομε απειρία ενδεχομένων προς έλεγχο (άπειρο πλήθος φυσικών αριθμών και άπειρο πλήθος σωμάτων που μπορούν να εμβαπτισθούν στο νερό). Εδώ η διαδικασία διαφέρει.

Για τη (β) εξασφαλίζεται μέσω ενός πεπερασμένου πλήθους λογικών βημάτων, όπου καθένα είναι λογική συνεπαγωγή του προηγούμενού του (απαγωγικός συλλογισμός), δηλαδή μέσω αυτού που ονομάζομε λογική (απαγωγική) απόδειξη, έχει δε a priori χαρακτήρα, δηλαδή δεν ελέγχονται όλα τα δυνατά ενδεχόμενα (πράγμα ανέφικτο λόγω του απείρου πλήθους τους), απ' όπου θα προέκυπτε εκ των υστέρων η αλήθεια της πρότασης.

Για τη (δ) εξετάζονται πολλά σώματα, καθένα αντιπροσωπευτικό μιας ευρείας κατηγορίας σωμάτων (π.χ. μέταλλα, οργανικές ενώσεις, ανόργανες ενώσεις, χημικά στοιχεία, χημικές ενώσεις, μείγματα κτλ.) και διαπιστώνεται η αλήθεια της πρότασης.

Σχόλιο: Από την σκοπιά των παραπάνω, για την (β) η λογική (απαγωγική) απόδειξη αντικαθιστά μία πλήρη επαγωγή σε περιπτώσεις που το πλήθος των ενδεχομένων είναι άπειρο. Θα επανέλθομε σ' αυτό πιο κάτω. Σε ότι αφορά την (δ), δημιουργείται μια εμπιστοσύνη για την αλήθεια της πρότασης, τόσο μεγαλύτερη, όσο περισσότερα είναι τα ενδεχόμενα που ελέγχθηκαν καθώς και όσο ευρύτερο φάσμα κατηγοριών αντικειμένων καλύπτουν τούτα (π.χ., έχοντας επαληθεύσει την πρόταση για 100 αντικείμενα από 10 διαφορετικές κατηγορίες σωμάτων, η εμπιστοσύνη είναι μεγαλύτερη από ότι αν και τα 100 αυτά αντικείμενα ανήκουν σε μια κατηγορία). Παρ' όλα αυτά, υπάρχει πάντα το ενδεχόμενο μελλοντικής (μερικής ή ολικής) διάψευσης της πρότασης. Την περιγραφείσα διαδικασία τεκμηρίωσης της (δ) θα ονομάσομε εκτεταμένη επαγωγή.

Η ανάλυση και τεκμηρίωση των (α)-(δ) είναι αντιπροσωπευτική και υπογραμμίζει τα ακόλουθα:

(i) Σε ότι αφορά τη διαδικασία τεκμηρίωσης προτάσεων που αναφέρονται σε (πιθανώς μεγάλο, αλλά πάντως) πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων, δεν υπάρχει διαφοροποίηση Μαθηματικών και Φυσικής· και στις δύο επιστήμες (μπορεί να) ακολουθείται πλήρης (πεπερασμένη) επαγωγή με την έννοια που προαναφέρθηκε, παρ' ότι στα μεν Μαθηματικά μπορεί ο έλεγχος κάθε ενδεχομένου να γίνεται με λογικό (απαγωγικό) συλλογισμό, στην δε Φυσική με εμπειρικό τρόπο (π.χ. βασισμένο σε πείραμα ή παρατήρηση).

(ii) Σε ότι αφορά τη διαδικασία τεκμηρίωσης προτάσεων που αναφέρονται σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων, υπάρχει ουσιώδης διαφοροποίηση Μαθηματικών και Φυσικής την οποία περιγράφομε παρακάτω.

Σε ότι αφορά τα Μαθηματικά: Αφού η πλήρης (άπειρη) επαγωγή είναι εν προκειμένω ανέφικτη, γίνεται αναγωγή της σε πεπερασμένου πλήθους λογική ακολουθία προτάσεων (όπου κάθε μία είναι λογική συνεπαγωγή της προηγούμενης), σε κάποιες από τις οποίες έχει ενσωματωθεί η απειρία του πλήθους των ενδεχομένων. Πρόκειται για την λογική (απαγωγική) απόδειξη που στηρίζεται σε δύο προϋποθέσεις: (1) Τον σαφή προσδιορισμό και την αποδοχή των (λογικών) κανόνων συνεπαγωγής, και (2) την αποδοχή των αρχικών προτάσεων της ακολουθίας ως αληθών. Οι (1) και (2) προφανώς οδηγούν στην (2') προϋποτίθεται ο προσδιορισμός κάποιων πρωταρχικών προτάσεων που συμφωνείται να λαμβάνονται ως αληθείς (αξιώματα). Έτσι, βάσει των παραπάνω, η απειρία του πλήθους των ενδεχομένων ενυπάρχει σε κάποια από τα αξιώματα μιας μαθηματικής θεωρίας κάνοντας εφικτή την τεκμηρίωση μιας πρότασης που αφορά άπειρο πλήθος ενδεχομένων, εφ' όσον οι προϋποθέσεις (1) και (2') γίνουν αποδεκτές. Για παράδειγμα, το αξίωμα του Ευκλείδη "από κάθε δύο σημεία περνά μία ευθεία", περιγράφει ένα άπειρο πλήθος ενδεχομένων, αφού τα σημεία του χώρου είναι άπειρα[3].

Σε ότι αφορά την Φυσική: Αφού η πλήρης (άπειρη) επαγωγή είναι εν προκειμένω ανέφικτη, εφαρμόζεται εκτεταμένη επαγωγή με την έννοια που περιγράφηκε νωρίτερα για την πρόταση (δ). Πρόκειται για διαδικασία

[3] Για την ακρίβεια, χρειάζονται περισσότερα αξιώματα ώστε να αποφανθεί κανείς ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άπειρα, ώστε το αξίωμα πράγματι να ενσωματώνει άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Π.χ. χρειάζονται τα αξιώματα σύνδεσης και διάταξης του Hilbert (Hilbert 1995).

τεκμηρίωσης που σε αντιδιαστολή με τη λογική (απαγωγική) απόδειξη δεν έχει τελικό χαρακτήρα, αλλά υπόκειται στο ενδεχόμενο της εμπειρικής διάψευσης. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί εδώ ότι είναι θεμελιώδες επιστημολογικό χαρακτηριστικό της Φυσικής η αποδοχή προτάσεων που τεκμηριώνονται με λογική (απαγωγική) απόδειξη, εφ' όσον προέρχονται τελικά από προτάσεις τεκμηριωμένες μέσω εκτεταμένης επαγωγής. Έτσι, είναι σαφές ότι και η Φυσική στηρίζεται σε κάποιες "πρωταρχικές προτάσεις" των οποίων όμως η αποδοχή δεν είναι θέμα συμφωνίας αλλά απόρροια εκτεταμένης επαγωγής. Τέτοιο χαρακτήρα έχουν οι θεμελιώδεις νόμοι μιας φυσικής θεωρίας[4].

Μη αναγνώριση της ταύτισης Μαθηματικών και πειραματικών επιστημών σε ότι αφορά το (i), μπορεί να προκαλέσει σύγχυση και επιστημολογικές διαμάχες. Εν μέρει, αυτή είναι η περίπτωση της επίλυσης του "προβλήματος των 4 χρωμάτων"[5] με υπολογιστή. Έγινε αναγωγή της απειρίας των ενδεχομένων σε ένα τεράστιο μεν, πλην όμως πεπερασμένο πλήθος περιπτώσεων που τελικά ελέγχθηκαν με υπολογιστή. Το ζήτημα που τέθηκε είναι κατά πόσον η διαδικασία αυτή συνιστά ή όχι μαθηματική απόδειξη. Η συνακόλουθη διαμάχη φαίνεται να σχετίζεται (αν και όχι αποκλειστικά) με τη μη διάκριση των δύο διαφορετικών, αλλά εξ ίσου αποδεκτών ειδών τεκμηρίωσης στα Μαθηματικά που περιγράφηκαν στα (i) και (ii) πιο πάνω[6]· της πλήρους (πεπερασμένης) επαγωγής που έχει κατά βάση επαγωγικό χαρακτήρα (με την έννοια ότι είναι τεκμηρίωση a posteriori) και της πλήρους (άπειρης) επαγωγής (δηλαδή της απαγωγικής λογικής απόδειξης) που έχει απαγωγικό χαρακτήρα (με την έννοια ότι είναι τεκμηρίωση a priori).

Συμπερασματικά, τόσο τα Μαθηματικά, όσο και η Φυσική χρησιμοποιούν ως διαδικασία τεκμηρίωσης την πλήρη επαγωγή, προκειμένου περί προτάσεων που αφορούν σε πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων και την λογική (απαγωγική) απόδειξη προκειμένου περί προτάσεων που αφορούν σε άπειρο πλήθος ενδεχομένως και δεν χαρακτηρίζονται ως "πρωταρχικές" (αξιώματα ή θεμελιώδεις νόμοι). Ουσιώδεις διαφορές εμφανίζονται σε ότι αφορά το καθεστώς αποδοχής των "πρωταρχικών" προτάσεων, θέμα που άπτεται της φιλοσοφίας των δύο επιστημών και που δεν θα θίξομε περαιτέρω εδώ.

(iii) Η εκτεταμένη επαγωγή λειτουργεί και ως ανακαλυπτική διαδικασία, τόσο στη Φυσική, όσο και στα Μαθηματικά, δηλαδή για τη σύλληψη, διατύπωση και τεκμηρίωση υποθέσεων και εικασιών. Η διαφορά έγκειται στο ότι μια πρόταση διαρκώς επαληθευόμενη μέσω εκτεταμένης επαγωγής, στην μεν Φυσική τελικά καθίσταται αποδεκτή ως αληθής, ενώ στα Μαθηματικά παραμένει πάντα μια πιθανώς αληθής πρόταση, μέχρις ότου διατυπωθεί λογική (απαγωγική) απόδειξη. Από την άλλη όμως θα πρέπει να τονισθεί ότι η εκτεταμένη επαγωγή αν και δεν οδηγεί στην πλήρη τεκμηρίωση μιας πρότασης στα Μαθηματικά, εν τούτοις συχνά μπορεί να δείξει τον δρόμο προς αυτήν, είτε μέσω της διαδικασίας που ακολουθείται κατά τον επαγωγικό έλεγχο επί μέρους περιπτώσεων, είτε μέσω της μορφής των αποτελεσμάτων στον οποίο οδηγεί τούτος. Το σημείο αυτό έχει μεγάλη επιστημολογική και διδακτική σημασία καθώς επιτρέπει να δούμε την εκτεταμένη επαγωγή ως το συνδετικό κρίκο μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής σε ότι αφορά την διαδικασία σύλληψης, διατύπωσης, τεκμηρίωσης και αποδοχής προτάσεων στο πλαίσιο των δύο επιστημών, έχοντας ένα χαρακτήρα ενδιάμεσο ανάμεσα στην πλήρη (πεπερασμένη) επαγωγή και τη λογική (απαγωγική) απόδειξη, η οποία αντικαθιστά την ανέφικτη πλήρη (άπειρη) επαγωγή. Σχετικά διδακτικά παραδείγματα δίνονται σύντομα στην επόμενη παράγραφο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αναφερόμενα στην παρ.1, καθίσταται σαφές ότι μια πληρέστερη περιγραφή της έχει σημαντικό διδακτικό ενδιαφέρον.

4. Η εκτεταμένη επαγωγή ως ενδιάμεση κατηγορία μεθόδου τεκμηρίωσης μιας πρότασης

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην παρ.3, η διαδικασία της εκτεταμένης επαγωγής είναι μια κατ' ουσία πειραματική διαδικασία (σε εμπειρικό ή σε νοητικό επίπεδο) και έχει ευρύτατη χρήση τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Μπορεί δε να οδηγήσει στη σύλληψη, διατύπωση και τεκμηρίωση της εμπιστοσύνης για την ορθότητα μιας πρότασης η οποία έτσι για μεν τα Μαθηματικά μπορεί να αποκτήσει το χαρακτήρα μιας εικασίας ή υπόθεσης (εργασίας), για δε τη Φυσική, τον χαρακτήρα μοντέλου περιγραφής ή φυσικού νόμου μιας κατηγορίας φυσικών φαινομένων. Εν προκειμένω, εικασία είναι πρόταση της οποίας την αλήθεια προσπαθώ να επιβεβαιώσω άμεσα. Υπόθεση είναι πρόταση που δέχομαι ως αληθή και χρησιμοποιώ μέχρις αποδείξεως ή διαψεύσεως της (π.χ. αν οδηγεί σε αντιφάσεις - όπως στην απόδειξη με

---

[4] Το θέμα είναι πιο περίπλοκο απ' ότι περιγράφεται εδώ. Η εκτεταμένη επαγωγή συνήθως δεν αφορά άμεσα τον ίδιο το νόμο, αλλά ένα όσο γίνεται μεγαλύτερο πλήθος λογικών συνεπαγωγών του. Από εκεί και πέρα γίνεται η σιωπηρή παραδοχή ότι ένα τόσο μεγάλο πλήθος επαγωγικά επαληθευμένων προτάσεων είναι εξαιρετικά απίθανο να απορρέει λογικά από εμπειρικά αναληθή αρχική πρόταση. Π.χ. για τον 2ο νόμο του Newton $F=m\gamma$, δεν έχομε ανεξάρτητες βασικές σχέσεις ορισμού της δύναμης F και της μάζας m, ώστε να γίνουν ανεξάρτητες πειραματικές μετρήσεις ελέγχου της σχέσης αυτής. Αυτό που ελέγχεται είναι οι λογικές συνέπειες του (θα λέγαμε ότι από εντελώς τυπική σκοπιά, ο 2ος νόμος του Newton είναι μια σχέση ορισμού μιας εκ των εννοιών της δύναμης ή της μάζας). Ανάλυση όμως του θέματος αυτού είναι πέραν των στόχων του παρόντος άρθρου.

[5] Κάθε χάρτης στο επίπεδο ή τη σφαίρα, μπορεί να χρωματισθεί με 4 μόνο χρώματα σε τρόπον ώστε κάθε δύο όμορες χώρες να έχουν διαφορετικό χρώμα (Davis & Hersh 1992, σελ. 360 κ.ε., Stewart 1989 ch.10).

[6] Εδώ παραβλέπομε το θέμα κομψότητας και οικονομίας της τεκμηρίωσης που μπορεί να απουσιάζει πλήρως στην (i) ή να είναι έντονο στην (ii). Αυτό όμως αφορά στο θέμα της ενδογενούς αισθητικής σε Μαθηματικά και Φυσική που δεν θίγομε εδώ (βλ. Τζανάκης 1997).

την εις άτοπον απαγωγή - ή σε ασυμφωνία με μελλοντικά δεδομένα)[7]. Προφανώς η διάκριση δεν είναι απόλυτη και εξαρτάται από τον τρόπο θεώρησης και χρήσης της κάθε πρότασης. Π.χ. το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη έχει μέχρι τον 19ο αιώνα πρωτίστως τον χαρακτήρα εικασίας που επιχειρήθηκε να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα, ενώ στο έργο των Gauss, Bolyai και Lobatschewski για τη θεμελίωση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, τόσο αυτό όσο και η άρνηση του έχουν χαρακτήρα υπόθεσης της οποίας εξετάζονται οι συνέπειες σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα αξιώματα (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Bonola 1955).

Με την έννοια που περιγράφηκε στην παρ.3, η διαδικασία ελέγχου μιας πρότασης βάσει εκτεταμένης επαγωγής έχει δύο βασικά χαρακτηριστικά:

- (Α) Έχει εξετασθεί ένα μεγάλο πλήθος ενδεχομένων.
- (Β) Έχουν προσδιοριστεί όσο γίνεται περισσότερες κατηγορίες ενδεχομένων όπου μπορεί να εφαρμοσθεί ο έλεγχος και τα ενδεχόμενα που εξετάσθηκαν στο (Α) ανήκουν σε όλες τις κατηγορίες αυτές.

Η κατηγοριοποίηση που απαιτεί το (Β) είναι συχνά καθοριστικής σημασίας για την κατανόηση του φαινομένου, την ισχυροποίηση της εμπιστοσύνης για την αλήθεια μιας πρότασης, και την συνειδητοποίηση αυτής καθεαυτής της ανάγκης τεκμηρίωσης της πρότασης. Χαρακτηριστικό μαθηματικό παράδειγμα εδώ είναι το θεώρημα του Jordan, ότι κάθε επίπεδη κλειστή καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα μεταξύ τους μέρη. Μέχρι την απόδειξη του, εθεωρείτο προφανές ακριβώς διότι δεν είχε γίνει κατανοητή η γενικότητα της έννοιας της κλειστής καμπύλης που δεν τέμνει τον εαυτό της και η οποία περιλαμβάνει ιδιαιτέρως περίπλοκες περιπτώσεις, απ' όπου και η πολυπλοκότητα της απόδειξης. Μια κατηγοριοποίηση όπως στο (Β) πιο πάνω μπορεί να αναδείξει μια τέτοια πολυπλοκότητα (βλ. Courant & Robbins 1941, section V.3.1), ή και να συμβάλει στην πλήρη τεκμηρίωση της αρχικής πρότασης, όπως στην περίπτωση του προαναφερθέντος προβλήματος των 4 χρωμάτων (Stewart 1989, ch.10). Τυπικό παράδειγμα στη Φυσική είναι ο νόμος διατήρησης της ενέργειας, που από την πολύ περιορισμένη του μορφή κατά τον 17ο αιώνα ως διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, επεκτείνεται επαγωγικά και σε άλλες μορφές ενέργειας (θερμική, ηλεκτρομαγνητική κτλ), ώστε σήμερα να αποτελεί ένα ακρογωνιαίο λίθο ολόκληρης της Φυσικής, του οποίου η γενικότητα έγινε σταδιακά και με επαγωγικό τρόπο αποδεκτή.

Είναι σαφές ότι ο έλεγχος (με καθαρά πειραματικό ή και λογικό τρόπο) μιας πρότασης, έχοντας κάνει την κατηγοριοποίηση που περιγράφηκε στο (Β), μπορεί τελικά να οδηγήσει στα ακόλουθα τρία ενδεχόμενα αναφορικά με το είδος των αντικειμένων (εμπειρικών ή νοητικών) στα οποία αναφέρεται η πρόταση, πέραν του προφανούς ενδεχομένου, το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα αντικείμενα αυτά να παραμένει αμετάβλητο:

(α) *Διεύρυνση του εννοιολογικού πλαισίου*: Για παράδειγμα, ο έλεγχος της εικασίας του Fourier ότι κάθε συνεχής συνάρτηση αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά, οδήγησε σε αντιπαραδείγματα του τύπου της συνάρτησης του Dirichlet (με τιμές 0 στους άρρητους και 1 στους ρητούς) και τελικά στη διεύρυνση της έννοιας της συνάρτησης και την υπό συνθήκες απόδειξη της αρχικής εικασίας (Boyer 1968 pp.599-600, Struik 1948, Kronfellner 1996).

(β) *Περιορισμός του εννοιολογικού πλαισίου*: Η εφαρμοσιμότητα του ορισμού της έννοιας του συνόλου από τον Cantor, ως μιας συλλογής από σαφώς καθορισμένα και διαχωρίσιμα νοητικά ή εμπειρικά αντικείμενα (Cantor 1955), οδήγησε σε λογικά παράδοξα του τύπου του Russell[8], γεγονός που μέσω της μετέπειτα αξιωματικής θεωρίας συνόλων είχε ως συνέπεια η έννοια του συνόλου να έχει ένα πιο περιορισμένο χαρακτήρα (βλ. π.χ. Αναπολιτάνος 1985).

(γ) *Διαχωρισμός του εννοιολογικού πλαισίου σε υποπεριοχές του*: Για παράδειγμα, μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα, σιωπηρά εφαρμοζόταν οι λανθασμένες υποθέσεις ότι η παράγωγος μιας σειράς συναρτήσεων είναι το άθροισμα της σειράς των παραγώγων τους, ή ότι για την άθροιση μιας σειράς μπορούμε να αναδιατάξομε τους όρους της ώστε τούτο να είναι ευκολότερα εφικτό. Προσεκτικός έλεγχος διαφόρων περιπτώσεων έδειξε ότι οι υποθέσεις αληθεύουν μόνον κατά περίπτωση, διαχωρίζοντας έτσι τις σειρές αντίστοιχα, σε συγκλίνουσες ομοιόμορφα ή μη και σε συγκλίνουσες απολύτως ή μη (Boyer 1968 pp.610, 442, 477-478, 488-489, Dieudonné 1978 p.251)

Η διαδικασία αιτιολόγησης μιας πρότασης που εφαρμόζεται σε μια ειδική κατηγορία αντικειμένων, ενδέχεται να ισχύει και για όλες τις άλλες στις οποίες αναφέρεται η πρόταση. Πέραν της προφανούς αυτής περίπτωσης, υπάρχουν τρία ακόμη ενδεχόμενα για το χαρακτήρα της αιτιολόγησης της πρότασης, στα οποία μπορεί να οδηγήσει τελικά ο έλεγχος της, βάσει εκτεταμένης επαγωγής:

(1) *Η πρόταση ισχύει μόνον για μία ή κάποιες κατηγορίες αντικειμένων στα οποία αναφέρεται τούτη*: Τυπικά παραδείγματα είναι τα (α) και (γ) πιο πάνω. Ένα στοιχειώδες διδακτικό παράδειγμα είναι η εικασία (που εύκολα μπορεί να κάνουν οι μαθητές) ότι το ορθόκεντρο τριγώνου βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του, ορμώμενοι τόσο από τη σχεδίασή του για οξυγώνια τρίγωνα (που συνήθως λαμβάνονται ως οι τυπικοί αντιπρόσωποι τριγώνου), όσο και από το γεγονός ότι η ανάλογη εικασία ισχύει για τα σημεία τομής των διαμέσων και των διχοτόμων.

---

[7] Με αυτήν την έννοια, η ανυπαρξία λύσης της διοφαντικής εξίσωσης $x^v + y^v = z^v$ για $v>2$, (εικασία του Fermat) ήταν εικασία μέχρι την απόδειξη της το 1995. Αντίστοιχα, η "υπόθεση του συνεχούς" στην θεωρία συνόλων (δεν υπάρχει πληθάριθμος ανάμεσα στον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών και τον πληθάριθμο του **R**) είχε τον χαρακτήρα υπόθεσης μέχρις αποδείξεως της ανεξαρτησίας τόσον αυτής όσο και της άρνησης της από τα υπόλοιπα αξιώματα της (καθιερωμένης) θεωρίας συνόλων (βλ. Dieudonné 1978, ch. XI, sections V.B, V.G, Davis & Hersh 1992, σελ.223, 308).

[8] Το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους, ούτε είναι μέλος του εαυτού του, ούτε δεν είναι μέλος του εαυτού του.

(2) *Η πρόταση ισχύει και για άλλες ή όλες τις κατηγορίες αντικειμένων στα οποία αναφέρεται τούτη, αλλά με παραλλαγή της διαδικασίας αιτιολόγησης (απόδειξης ή πειραματικής διερεύνησης) που έχει εφαρμοσθεί ήδη επιτυχώς*:

(i) *Με απλή παραλλαγή*: Στοιχειώδες παράδειγμα είναι η αιτιολόγηση του νόμου του συνημιτόνου σε αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα. Η πρόταση μπορεί να διαπιστωθεί και να αιτιολογηθεί για τα οξυγώνια και η εικασία ότι τούτη ισχύει γενικά να αιτιολογηθεί με απλή παραλλαγή της αρχικής απόδειξης.

(ii) *Με αξιόλογη παραλλαγή*: Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το θεώρημα του Cauchy στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων. Στην αρχική του, στοιχειωδέστερη και ευκολότερα αποδείξιμη εκδοχή αποφαίνεται ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος κλειστής καμπύλης μιας συνάρτησης που είναι αναλυτική σε μια απλά συνεκτική περιοχή που περιλαμβάνει την καμπύλη, είναι μηδέν. Όμως η εικασία ότι τούτο αληθεύει για συναρτήσεις αναλυτικές σε πολύ γενικότερης τοπολογικής μορφής περιοχές, απαιτεί σημαντικές τροποποιήσεις στην αρχική απόδειξη (βλ. π.χ. Ahlfors 1966).

(3) *Η πρόταση ισχύει και για άλλες ή όλες τις κατηγορίες αντικειμένων στα οποία αναφέρεται τούτη, αλλά με άλλη διαδικασία αιτιολόγησης (απόδειξης ή πειραματικής διερεύνησης) από αυτήν που έχει εφαρμοσθεί ήδη επιτυχώς*:

(i) *Γενίκευση της ήδη υπάρχουσας αιτιολόγησης*: Για παράδειγμα, με γνωστή τη μορφή της λύσης μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές προχωρεί κανείς στην εικασία ότι και στην περίπτωση που η γραμμική διαφορική εξίσωση έχει μεταβλητούς συντελεστές, η λύση είναι παρόμοιας μορφής. Τούτο πράγματι οδηγεί τελικά στη γενίκευση της ήδη υπάρχουσας απόδειξης που δίνει το γενικό τύπο της λύσης μιας τέτοιας εξίσωσης (π.χ. Apostol 1969).

(ii) *Ριζική διαφοροποίηση από την ήδη υπάρχουσα αιτιολόγηση*: Κλασικό παράδειγμα είναι η απόδειξη της εικασίας του Fermat (βλ. υποσημείωση 7) για ειδικές κατηγορίες εκθετών (βλ. Edwards 1977) και η πρόσφατη, ριζικά διαφορετική απόδειξη της γενικής περίπτωσης από τον Wiles (για μια εκλαϊκευτική περιγραφή των βασικών ιδεών της βλ. Singh 1998).

Τέλος, όπως ήδη αναφέρθηκε στο τέλος του μέρους 3, πέραν του να οδηγήσει στη σύλληψη, διατύπωση και ισχυροποίηση της εμπιστοσύνης στην αλήθεια μιας πρότασης, η εκτεταμένη επαγωγή συχνά μπορεί να δείξει και το δρόμο για την πλήρη τεκμηρίωσή της (γεγονός με μεγάλη διδακτική σημασία που δε φαίνεται να έχει ληφθεί υπ' όψιν με συστηματικό τρόπο). Τούτο μπορεί να συμβεί με πολλούς τρόπους τους οποίους αναφέρομε παρακάτω δίνοντας σύντομα και ένα απλό διδακτικό μαθηματικό παράδειγμα:

(I) Ήδη με την εξέταση ενός ή εν γένει πολύ λίγων παραδειγμάτων, είναι σαφής η πλήρης αποδεικτική διαδικασία, τόσο που συχνά να μην είναι απαραίτητη η τυπική διατύπωσή της, ή ακόμα και να οδηγεί τούτη σε σύγχυση.

(II) Ο επαγωγικός έλεγχος δείχνει καθαρά το βασικό κορμό της πλήρους απόδειξης.

Τα (I) και (II) μπορεί να εμφανιστούν (i) είτε μέσω της ίδιας της διαδικασίας που ακολουθείται κατά τον έλεγχο επί μέρους περιπτώσεων, (ii) είτε μέσω του αποτελέσματος του ελέγχου αυτού. Απλά τέτοια διδακτικά παραδείγματα είναι τα εξής:

<u>Για το (I)(i)</u>: Από το εύκολα αιτιολογούμενο γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων 2×2 είναι πράξη προσεταιριστική, φαίνεται καθαρά ότι τούτο ισχύει γενικά, αν και η τυπική απόδειξη του στη γενική περίπτωση πινάκων $\nu \times \nu$ θα περιέπλεκε και θα μπέρδευε τους μαθητές λυκείου.

<u>Για το (I)(ii)</u>: Κατασκευάζοντας τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος (π.χ. με γνώμονα) βλέπει κανείς καθαρά το σχηματισμό δύο ίσων ορθογωνίων τριγώνων (κοινή κάθετος και ίσες τις άλλες κάθετες πλευρές), γεγονός που εξασφαλίζει την ισχύ της χαρακτηριστικής ιδιότητας της μεσοκαθέτου (τα σημεία της ισαπέχουν από τα άκρα του ευθ. τμήματος).

<u>Για το (II)(i)</u>: Η πρόταση ότι κάθε κλάσμα έχει περιοδική δεκαδική αναπαράσταση. Η εκτέλεση πολλών διαιρέσεων αρκεί για να ανακαλυφθεί αυτή η πρόταση, ενώ ταυτόχρονα από την ίδια την ακολουθούμενη διαδικασία, δηλαδή τον αλγόριθμο της διαίρεσης, φαίνεται καθαρά ότι επειδή τα πιθανά υπόλοιπα είναι πλήθους ίσου με το διαιρέτη, τελικά κάποιο από αυτά θα επανεμφανισθεί σε κάποιο βήμα, απ' όπου προκύπτει και η περιοδικότητα του δεκαδικού αναπτύγματος. Άλλο τέτοιο, ακόμα χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελεί ή πρόταση ότι για κάθε κλάσμα α/β το μήκος της περιόδου του δεκαδικού του αναπτύγματος είναι διαιρέτης του β-1 (βλ. σχετικά Κούρκουλος 1999). <u>Για το (II)(ii)</u>: Η αναζήτηση του γεωμετρικού τόπου (γ.τ.) του ορθοκέντρου *Η* τριγώνου *ΑΒΓ*, όταν το *Α* κινείται σε κύκλο με *ΒΓ* χορδή του. Ο γ.τ. εντοπίζεται εμπειρικά παίρνοντας πολλές διαφορετικές θέσεις του *Α* [9], και φαίνεται να είναι κύκλος που περνά από τα *Β* και *Γ*, ίσος με τον περιγεγραμμένο στο *ΑΒΓ*. Η εικασία αυτή μας οδηγεί στο ότι η γωνία *ΒΗΓ* πρέπει να βαίνει σε σταθερό τόξο (ίσο με το τόξο *ΒΑΓ*). Αναζητώντας αν όντως τούτο αληθεύει, αποδεικνύομε εύκολα ότι η γωνία αυτή είναι παραπληρωματική της γωνίας *Α*, συμπληρώνοντας έτσι την απόδειξη του γ.τ. Παρόμοιο παράδειγμα είναι και η εύρεση του γ.τ. του σημείου τομής των διχοτόμων τριγώνου *ΑΒΓ*, όταν το *ΒΓ* είναι χορδή δοθέντος κύκλου και το *Α* τον διαγράφει.

(III) Ο έλεγχος ειδικών περιπτώσεων δεν έχει κάποια εμφανή σχέση με την τελική απόδειξη της πρότασης. Π.χ. Αν και η διερεύνηση που κάνουν μαθητές Β' τάξης γυμνασίου πολλών διαιρέσεων μεταξύ ακεραίων, τους οδηγεί στην εύρεση της ιδιότητας ότι τέτοιες διαιρέσεις με διαιρέτη γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, τερματίζονται πάντα, δεν μπορεί να τους οδηγήσει και στην απόδειξη της (Κούρκουλος 1999).

(IV) Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι συχνά εμφανίζεται και η αντίστροφη σχέση μεταξύ επαγωγικού ελέγχου και

[9] Η κατασκευή τους διευκολύνεται σημαντικά με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού όπως ο "Γεωμέτρης".

απαγωγικής αιτιολόγησης: Η τελευταία μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό, κατηγοριοποίηση και έλεγχο ειδικών περιπτώσεων. Π.χ. η κατασκευή αντιπαραδειγμάτων σε επί μέρους υποθέσεις της πρότασης εμπίπτει στην κατηγορία αυτή.

Οι περιγραφείσες κατηγοριοποιήσεις (α)-(γ) και (1)-(3), και (I)-(IV) πέραν του επιστημολογικού τους ενδιαφέροντος, έχουν και διδακτικό ενδιαφέρον αφού είναι εύκολο να δει κανείς την εφαρμογή τους σε σχολικό επίπεδο (βλ. π.χ. τα παραδείγματα στα (I)-(IV) πιο πάνω). Μπορεί να παράσχουν έτσι ένα αρκετά συγκεκριμένο μεθοδολογικό σχήμα για την εφαρμογή της εκτεταμένης επαγωγής στη διδακτική πράξη.

5. Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι η ανάλυση του ερωτήματος 2 της παρ.1, που έγινε στις παρ. 2, 3 οδηγεί στα εξής συμπεράσματα:

1. Οι διαδικασίες τεκμηρίωσης μιας πρότασης στα Μαθηματικά και στη Φυσική ταυτίζονται προκειμένου περί προτάσεων που αναφέρονται σε πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων. Με άλλα λόγια, η πλήρης (πεπερασμένη) επαγωγή μπορεί να ειδωθεί και ως καθαρά επαγωγική διαδικασία, και ως πλήρης απόδειξη.

2. Οι διαδικασίες αυτές διαφοροποιούνται προκειμένου περί προτάσεων που αναφέρονται σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Σ' αυτήν την περίπτωση έχομε ως κοινό πυρήνα και στις δύο επιστήμες, αφ' ενός τη λογική (απαγωγική) απόδειξη από κάποιες αρχικές προτάσεις και αφ' ετέρου την διαδικασία της εκτεταμένης επαγωγής. Η τελευταία λειτουργεί

--στα Μαθηματικά ως ανακαλυπτική διαδικασία σύλληψης και διατύπωσης μιας πρότασης και ως ένα προστάδιο για την τελική λογική (απαγωγική) απόδειξη,

--στη Φυσική ως ανακαλυπτική διαδικασία σύλληψης και διατύπωσης μιας πρότασης και ως βασική διαδικασία για την μετατροπή μιας πρότασης σε φυσικό νόμο, στο βαθμό που πληρούνται οι συνθήκες (Α), (Β) της παρ.4.

Κατά συνέπεια, αποτελεί μια διαδικασία τεκμηρίωσης, ενδιάμεση ανάμεσα στη λογική (απαγωγική) απόδειξη και την απόδειξη βάσει πλήρους (πεπερασμένης) επαγωγής. Επέκταση της ανάλυσής της που επιχειρήθηκε στην παρ.4, θα μπορούσε να παράσχει συγκεκριμένο μεθοδολογικό σχήμα για το πέρασμα από την αιτιολόγηση βάσει ελλιπούς ή πλήρους (πεπερασμένης) επαγωγής, στη λογική αιτιολόγηση.

3. Σε αντίθεση με τον a posteriori χαρακτήρα της πλήρους (πεπερασμένης) επαγωγής και της εκτεταμένης επαγωγής όπως αυτές ορίσθηκαν στην παρ.3, η λογική (απαγωγική) αιτιολόγηση έχει a priori χαρακτήρα αντικαθιστώντας την ανέφικτη (πλήρη) επαγωγή στις περιπτώσεις όπου υπάρχει άπειρο πλήθος ενδεχομένων. Πιο συγκεκριμένα, ο de facto ανέφικτος έλεγχος απείρου πλήθους ενδεχομένων, αντικαθίσταται από μια πεπερασμένη ακολουθία λογικών συνεπαγωγών[10] από κάποιες πρωταρχικές προτάσεις που λαμβάνονται ως αληθείς.

4. Όπως είναι γνωστό, το καθεστώς αποδοχής της αλήθειας των πρωταρχικών αυτών προτάσεων είναι μια επί πλέον ειδοποιός διαφορά Μαθηματικών και Φυσικής:

--Στα μαθηματικά οι αρχικές προτάσεις (αξιώματα) γίνονται αποδεκτές λόγω της προφάνειας ή του εύλογου χαρακτήρα τους, ή (στο πλαίσιο της αξιωματικής μεθόδου που εμφανίζεται στον 20ο αιώνα) της μεταξύ τους μη αντιφατικότητας. Έτσι, οι από αυτές λογικά συνεπαγώμενες προτάσεις έχουν a priori τελική ισχύ στο βαθμό που τα αξιώματα δεν τροποποιούνται.

--Στη Φυσική οι αρχικές προτάσεις (θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι) γίνονται αποδεκτές βάσει μιας προσεκτικής διαδικασίας εκτεταμένης επαγωγής για την άμεση επαλήθευσή τους ή την επαλήθευση των λογικών συνεπαγωγών τους. Κατ' επέκταση, δεν έχουν a priori τελική ισχύ αλλά υπόκεινται σε διάψευση άμεσα οι ίδιες, ή έμμεσα, βάσει της διάψευσης άλλων προτάσεων που απορρέουν από τις αρχικές, απαγωγικά (δηλαδή μέσω απόδειξης), ή και πειραματικά.

Τα προαναφερθέντα συμπεράσματα έχουν διδακτικό ενδιαφέρον διότι καταδεικνύουν τη σημασία των επαγωγικών διαδικασιών σύλληψης και τεκμηρίωσης μιας πρότασης ως ένα προγενέστερο στάδιο της λογικής (απαγωγικής) απόδειξης, και ως προϋπόθεση για την κατανόησή της.

Από ιστορικής πλευράς, στα Μαθηματικά φαίνεται να εμφανίζεται ως διαδικασία μερικής τεκμηρίωσης μιας πρότασης, ακολουθούμενη από την απόδειξή της.

Από διδακτικής πλευράς το ίδιο συμβαίνει και με τους μαθητές.

Από επιστημολογικής πλευράς, αναμένει κανείς ότι μια προσεκτική και σοβαρή ενασχόληση με την επαγωγή, θα καταστήσει σαφή τα όρια της, θέτοντας έτσι τις προϋποθέσεις για την ουσιαστική κατανόηση της αναγκαιότητας της απόδειξης ως της "οικονομικότερης" και ασφαλούς "μετάλλαξης" της εκτεταμένης επαγωγής σε πλήρη (άπειρη) επαγωγή.

Συγκεκριμένες διδακτικές εφαρμογές της θεώρησης του παρόντος κειμένου θα δοθούν σε άλλη εργασία.

---

[10] Ας σημειωθεί εδώ ότι οι λογικοί κανόνες βάσει των οποίων επεξεργαζόμαστε τις υπό μελέτη προτάσεις, είναι και αυτές προτάσεις που αφορούν σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων (εν προκειμένω, προτάσεων) και οι οποίες έχουν γίνει και αυτές αποδεκτές βάσει εκτεταμένης επαγωγής, πράγμα που εξασφαλίζει την αποδοχή τους τόσο στα Μαθηματικά, όσο και στη Φυσική.

Βιβλιογραφία

-Ahlfors, L.V., 1966, *Complex Analysis*, Tokyo: McGraw-Hill, sections 4.1, 4.4.

-Αναπολιτάνος, Δ.Α., 1985, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Αθήνα: Νεφέλη, παρ. 2.4, ιδιαίτερα παρ. 2.4.4.

-Apostol, T., 1967, *Calculus*, vol.I, Waltham MA: Xerox 1967, sections 7.16, 7.18.

-Arsac G., 1987, "L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques* (R.D.M.) **8**, 267 - 312.

-Ballachef N., 1982, "Preuve et démonstration en mathématiques au collège", *R.D.M* **3**, 261- 304.

-Bonola, R., *Noneuclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development*, New York: Dover 1955, chs I, II, III.

-Boyer C. B., 1968, *A History of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

-Brousseau, G., 1983, "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" *R.D.M.* **4**, 165-198, p.170.

-Brown, H.I., 1993, *Αντίληψη, θεωρία και δέσμευση: Μια νέα φιλοσοφία της Επιστήμης*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

-Cantor, G., 1955, *Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers*, New York: Dover, p.85.

-Courant, R. and Robbins, H., 1941, *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford: Oxford University Press.

-Davis, P.J. and Hersh, R., 1992, *Η μαθηματική εμπειρία*, Αθήνα: Τροχαλία.

-Dieudonné, J., 1978, *Abregé d' Histoire des Mathématiques*, Paris: Hermann.

-Edwards, H.M., 1977, *Fermat's Last Theorem: A genetic introduction to algebraic number theory*, New York: Springer.

-Flato, M., 1993, *Η ισχύς των Μαθηματικών*, Αθήνα: Κάτοπτρο, σελ.71.

-Hadamard, J., 1954, *The psychology of invention in the mathematical field*, New York: Dover, p.104.

-Hiebert J., Carpenter T.P., 1992, "Learning and teaching with understanding", in D.A. Grouws (ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, New York: McMillan.

-Hilbert, D., 1995, *Θεμέλια της Γεωμετρίας (Grundlagen der Geometrie)*, μετάφραση από την 7η γερμανική έκδοση (1930), Αθήνα: Τροχαλία, παρ.1.4.

-Κούρκουλος, Μ., 1998, "Στοιχεία για τους περιοδικούς δεκαδικούς και την συμπεριφορά των διδασκόντων και των μαθητών", υπό έκδοση στα *Πρακτικά του 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Αθήνα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

-Kronfellner, M., 1996, "The history of the concept of function and some implications for classroom teaching", in R. Calinger (ed.) *Vita Mathematica: Historical research and integration with teaching*, Washington DC: The Mathematical Association of America, pp. 317-320.

-Lakatos, I., 1976, *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press, Introduction.

-Penrose, R., 1997, *Στις σκιές του νου*, Αθήνα: Γκοβόστης, παρ.1.12.

-Poincaré H., 1996, *Science and Method*, Bristol: Thoemmes Press, section II.1.

-Sierpinska, A., 1994, *Understanding in Mathematics*, London: The Falmer Press.

-Singh, S., 1997, *Fermat's Last Theorem*, London: Fourth Estate Ltd, chs.5-7.

-Stewart, I., 1989, *Les Mathématiques*, Paris: Pour la Science, pp. 6-7.

-Struik, D.J., 1948, *A concise History of Mathematics*, New York: Dover, p.148.

-Τζανάκης, Κ., 1996, "Συσχέτιση της διδασκαλίας Μαθηματικών και Φυσικής βάσει της ιστορικής τους εξελίξεως: Μια γενετική προσέγγιση", *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση και την κοινωνία*, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 349-361, παρ.2.

-Τζανάκης, Κ., 1997, "The quest of beauty in research and teaching of Mathematics and Physics: A historical approach" *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **30**, 2097-2105.

-Τζανάκης, Κ., 1998α, "Discovering by analogy: The case of Schrödinger's equation" *Europ. J. Physics*, **19**, 69-75.

-Τζανάκης, Κ., 1998β, "Όροι και προϋποθέσεις ενός εποικοδομητικού ρόλου της ιστορίας των Μαθηματικών στην κατανόηση και την διδασκαλία τους", *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών* **3**, 58-86.

-Τζανάκης, Κ., 1999, "Mathematical Physics and Physical Mathematics: A historical approach to didactical aspects of their relation", Plenary talk, υπό δημοσίευση στα *Proc. of the 3rd European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, Leuven, Belgium.

-Τζανάκης, Κ., Κούρκουλος, Μ., 1998, "Η παροχή μαθηματικής παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο", προδημοσίευση, Παν/μιο Κρήτης.