Η ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΛΗΡΗ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ, ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ

Καργιωτάκης Γιώργος, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αθηνών, Εργαστήριο Πληροφορικής, Ιπποκράτους 20, 106 79 Αθήνα, Εθνική Εστία Επιστημών, 6η στάση Λεωφόρος Χασιάς, 13122 Ίλιον, g-kargiot@otenet.gr

Λέξεις Κλειδιά: διδασκαλία μαθηματικών με χρήση λογισμικού, ανάδραση περιβάλλοντος, έλεγχος κατά την διάρκεια επίλυσης προβλήματος, γνωστική εξέλιξη μιας έννοιας στον μαθητή, γνωστικά χαρακτηριστικά του μαθητή σε πραγματικό χρόνο.

Θέμα: Διδακτική των μαθηματικών και εκπαιδευτικό Λογισμικό, Ανάπτυξη εκπαιδευτικών περιβαλλόντων μοντελοποίησης.

Επίπεδο Εκπαίδευσης: Γυμνάσιο.

Κατηγορία: Ανίχνευσης, Εμπειρική – Πειραματική.

Περίληψη

Η καταγραφή των συμπεριφορών η οποία γίνεται από το «ιστορικό» και το «γνωστικό γράφημα ατομικών γνώσεων» του εκπαιδευτικού προγράμματος «fonctuse» και η αρχική ανάλυση τους μέσα από μια μελέτη περιπτώσεων μας δίνει την δυνατότητα να ταυτοποιήσουμε την ενδυνάμωση διαδικασιών ελέγχου του μαθητή καθώς και την γνωστική εξέλιξη, καταγράφοντας παράλληλα τις ενδεχόμενες λαθεμένες γνωστικές αναπαραστάσεις αναδεικνύοντας έτσι τα διαφορετικά προφίλ μαθητών.

Ι. Εισαγωγή

Στο πρώτο μέρος της εισήγησης μας θα παρουσιάσουμε το εκπαιδευτικό πρόγραμμα fonctuse που προτείνει την αναζήτηση της αλγεβρικής εξίσωσης μιας γραφικής παράστασης που εμφανίζεται στην οθόνη. Η αρχική έκδοση, όπως τη σχεδίασε ο A. Dagher, χρησιμοποιήθηκε για τα πρώτα πειράματα συσχέτισης γραφικών αναπαραστάσεων και αλγεβρικών εξισώσεων σε περιβάλλον υπολογιστή κατά τη διάρκεια της έρευνας για τη διδακτορική του διατριβή.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μία εξελισσόμενη έρευνα με στόχο να κατανοήσουμε καλύτερα τι συμβαίνει στην πραγματικότητα όταν χρησιμοποιούνται περιβάλλοντα υπολογιστή για τη διδασκαλία της έννοιας των συναρτήσεων και ειδικότερα, όταν χρησιμοποιούνται τέτοια περιβάλλοντα για το συσχετισμό των αλγεβρικών εξισώσεων και γραφικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων.

Στην πραγματικότητα, η προβληματική μας είναι διττή: γνωστική και συγχρόνως μεθοδολογική.

Σε γνωστικό επίπεδο, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε διαδικασίες που εμπλέκονται στη θετική προσαρμογή σε περιβάλλοντα υπολογιστή. Οι διαδικασίες αυτές είναι άραγε πολύ διαφορετικές από όσες εμπλέκονται στην προσαρμογή σε συνηθισμένα περιβάλλοντα "χαρτιού και μολυβιού"; Ποια είναι τα αποτελέσματα των ειδικών χαρακτηριστικών που αφορούν την παραγόμενη μαθηματική γνώση;

Ωστόσο, η έρευνα παρουσιάζει και μεθοδολογικό στόχο: είναι δυνατό άραγε, να προκύψει από την εγγραφή της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθητή και μηχανής, μία αυτοματοποιημένη ανάλυση της γνωστικής κατάστασης και εξέλιξης του μαθητή που επιτρέπει:

- άμεση ανάδραση (feed back) για τον καθηγητή σε κλασικούς όρους σχημάτων, εννοιών και παρερμηνειών;
- λογική αλλαγή και αλλαγή σε πραγματικό χρόνο των παραμέτρων του λογισμικού έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η αποτελεσματικότητα του περιβάλλοντος;

Με άλλα λόγια, είναι δυνατό άραγε να αναπτύξουμε στο σημείο αυτό, ένα πρότυπο μαθητή και ένα πρότυπο της διδακτικής αλληλεπίδρασης που να επιτρέπει τη μετάβαση από ένα "α-διδακτικό" λογισμικό (το αρχικό προϊόν) σε ένα έξυπνο διδακτικό λογισμικό, δηλαδή σε ένα λογισμικό που να μπορεί τουλάχιστον να επιλέγει τις καταστάσεις που προτείνονται στους μαθητές ανάλογα με την ανάλυση της συμπεριφοράς τους, σε πραγματικό χρόνο;

ΙΙ. Παρουσίαση της παρούσας έκδοσης

Η έκδοση που θα παρουσιάσουμε είναι η παραθυρική έκδοση που έχουμε εξελληνίσει, γραμμένη σε C++ με τη βοήθεια ειδικού. Η αρχή του προγράμματος στηρίζεται στην απευθείας προβολή στην οθόνη μίας καμπύλης της οποίας ο μαθητής πρέπει να βρει μία εξίσωση με συγκεκριμένη αλγεβρική μορφή.

1. Οι μεταβλητές του προγράμματος

Δεδομένου ότι ήταν σημαντικό να μπορούμε να μεταβάλλουμε τις συνθήκες της προσαρμογής, εισήχθηκαν διαφορετικές μεταβλητές των οποίων η τιμή μπορεί να καθοριστεί από τον ερευνητή ή τον καθηγητή που χρησιμοποιεί το λογισμικό.

Οι μεταβλητές αυτές αφορούν:

α) το είδος της καμπύλης: πρόκειται για γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού καθώς και ομογραφικών συναρτήσεων.

β) το είδος της συγκεκριμένης αλγεβρικής μορφής:

• οι εξισώσεις πρώτου βαθμού παρουσιάζονται με την μορφή F0 : $y = \alpha \chi + \beta$.

• οι εξισώσεις δεύτερου βαθμού παρουσιάζονται με τρεις διαφορετικές μορφές:

F1 : $y = \alpha \chi 2 + \beta \chi + \gamma$

F2 : $y = \alpha (\chi - \beta)2 + \gamma$

F3 : $y = \alpha (\chi - \beta)(\chi - \gamma)$

• οι ομογραφικές εξισώσεις παρουσιάζονται με την μορφή F4 : $y = (\alpha \chi + \beta)/(\gamma\chi + \delta)$.

γ) τον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται οι καμπύλες και η αλγεβρική μορφή τους: Μία θεματική ενότητα έχει προετοιμαστεί προηγούμενα από τον καθηγητή. Αυτή η θεματική ενότητα μπορεί να είναι:

• <u>ελεύθερη</u>: ασκήσεις της μορφής F0 .... F4 θα επιλεγούν στην τύχη από τον υπολογιστή κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

• <u>προκαθορισμένη</u>: ασκήσεις με προκαθορισμένες αλγεβρικές μορφές από τις F0....F4 θα επιλεγούν στην τύχη από τον υπολογιστή κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

• <u>τύπου λίστας</u>: προκαθορισμένες ασκήσεις που έχουν επιλεγεί από τον καθηγητή.

δ) τα διαφορετικά διαθέσιμα εργαλεία για τους μαθητές και το αντίστοιχο κόστος τους: για κάθε άσκηση ο μαθητής διαθέτει ένα σύνολο σημείων τα οποία πρέπει να διαχειριστεί κατάλληλα, μια και καθένα από τα διαθέσιμα εργαλεία κοστολογείται διαφορετικά. Στην περίπτωση που εξαντληθεί το σύνολο των σημείων που του έχουν διατεθεί, δίνεται από τον υπολογιστή η σωστή απάντηση. Τα εργαλεία πού έχει ο μαθητής στην διάθεση του είναι:

• <u>συντεταγμένες</u>: ο μαθητής μπορεί να ζητήσει τις συντεταγμένες ενός σημείου του γραφήματος πού θα υποδείξει.

• <u>χάραξη γραφικής παράστασης</u>: ο μαθητής μπορεί να ζητήσει τη γραφική παράσταση μίας εξίσωσης.

• <u>απάντηση</u>: ο μαθητής μπορεί να προτείνει την αλγεβρική εξίσωση της γραφικής παράστασης δίνοντας τιμές στους συντελεστές α, β, γ και δ.

• <u>τελευταίες χαράξεις</u>: ο μαθητής μπορεί να ζητήσει την ταυτόχρονη εμφάνιση των γραφικών παραστάσεων των τελευταίων αλγεβρικών εξισώσεων που έχει προτείνει.

ε) η ανάδραση που προκύπτει σε περίπτωση λανθασμένης προτεινόμενης εξίσωσης: σε περίπτωση πού ο μαθητής προτείνει λανθασμένη αλγεβρική εξίσωση έχουμε δύο ειδών αξιολόγηση, σε γραφικό και αλγεβρικό επίπεδο:

• χάραξη της γραφικής παράστασης της λανθασμένης εξίσωσης με κόκκινο χρώμα σε αντίθεση με τη ζητούμενη γραφική παράσταση πού είναι με πράσινο,

• αξιολόγηση των επί μέρους συντελεστών μόνο στην περίπτωση άμεσης απάντησης.

2. Επίπεδα Λειτουργίας

Το λογισμικό έχει δομηθεί γύρω από τρία υποσυστήματα:

Α- ένα υποσύστημα διαλόγου (dialog module) που δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα να καθορίσει τις τιμές των μεταβλητών του λογισμικού για ένα μάθημα (υπάρχουν προκαθορισμένες τιμές).

Β- ένα υποσύστημα δράσης που χειρίζεται την αλληλεπίδραση με τον σπουδαστή.

Γ- ένα υποσύστημα ανάλυσης το οποίο παρέχει πληροφορίες σχετικά με το μάθημα σε πραγματικό χρόνο:

• τυποποιημένες στατιστικές,

• το ιστορικό της κάθε άσκησης,

• αυτόματη χρονομέτρηση,

• διαγράμματα της γνωστικής εξέλιξης του μαθητή ανάλογα με αυτό που αποκαλούμε "ατομική γνώση" (atomic knowledge) (βλ. παρακάτω).

3. Οι δυσκολίες

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν παραπάνω, το fonctuse συνάντησε πολλές δυσκολίες:

Α- πρέπει να προσαρμόζεται καλά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συνάγουν αλγεβρικές εξισώσεις συναρτήσεων από γραφικές αναπαραστάσεις.

Β- πρέπει να μας διευκολύνει ώστε να μεταβάλλουμε ορισμένα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος με σκοπό να μελετήσουμε:

• το αποτέλεσμα των πιθανών διδακτικών μεταβλητών στις διαδικασίες προσαρμογής,

• την προσαρμοστικότητα της δημιουργηθείσας γνώσης.

Γ- πρέπει να δίνει τη δυνατότητα λεπτομερέστατης ανάλυσης των διαδικασιών που εμπλέκονται κατά την προσαρμογή του περιβάλλοντος μέσω επαρκούς εγγραφής της αλληλεπίδρασης μαθητή-μηχανής.

ΙΙΙ. Η έννοια της ατομικής γνώσης

Η έννοια της ατομικής γνώσης αποτέλεσε το πρώτο εργαλείο που εισήχθη με σκοπό να αποκτήσουμε ένα πρότυπο μαθητή που προσαρμόζεται στους σκοπούς μας και στις υπάρχουσες δυσκολίες. Η έννοια αυτή ανταποκρίνεται σε ορισμένες ανάγκες:

• Λαμβάνει υπόψη την πολυπλοκότητα των γνωστικών διαδικασιών υπογραμμίζοντας την ικανότητα εναλλαγής μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας και καθιστά δυνατή την αναγνώριση μερικής επιτυχίας.

• Λαμβάνει υπόψη το είδος των δεδομένων που έχουν προκύψει κατά την εγγραφή της αλληλεπίδρασης μαθητή-μηχανής και το σκοπό της αυτοματοποιημένης ανάλυσης των δεδομένων αυτών.

Έτσι, λοιπόν, με τον όρο στοιχείο γνώσης (atom of knowledge) εννοούμε τη σχέση ανάμεσα στην ιδιότητα ενός συντελεστή αλγεβρικής εξίσωσης (μίας συνάρτησης) και στην ιδιότητα της γραφικής του αναπαράστασης.

Η λέξη "ατομικός" σημαίνει ότι ο όρος αναφέρεται σε ένα μόνο συντελεστή και ότι είναι αναγνώσιμη επάνω στο γράφημα χωρίς κανέναν επιπλέον υπολογισμό.

Για παράδειγμα, στον τύπο F1 για τις παραβολές, ο συντελεστής A μπορεί να συνδεθεί με ένα πολύπλοκο σύνολο γνώσεων:

A › 0 • το άνοιγμα της παραβολής έχει κατεύθυνση προς το θετικό ψ

A1 › A2 › 0 • τα δύο ανοίγματα έχουν κατεύθυνση προς το θετικό ψ και η παραβολή 1 είναι λιγότερο ανοικτή από την παραβολή 2,

και πολλά άλλα παραδείγματα. Εάν το A είναι ακέραιος και εάν εμφανίζεται πλέγμα στην οθόνη, μπορείτε ακόμη και να διαβάσετε την ακριβή τιμή του A προσθέτοντας μία μονάδα στην τιμή του x της κορυφής και διαβάζοντας την αντίστοιχη μεταβολή κατά μήκος του άξονα ψ.

Στην αρχή, προσπαθήσαμε να αναγνωρίσουμε και να ταξινομήσουμε διαφορετικά κάποιους τομείς γνώσεων που θα μπορούσαν να συνδεθούν με τη συσχέτιση αλγεβρικών εξισώσεων και γραφικών αναπαραστάσεων, με ιδιαίτερη έμφαση στους ατομικούς τομείς της γνώσης που προσδιορίζονται πολύ εύκολα στο σύστημα διασύνδεσης του υπολογιστή.

Επίσης, κάναμε μία a priori ανάλυση των δυνατών στρατηγικών που αναπτύσσονται από τους μαθητές, όσον αφορά την υποκείμενη γνώση, το αντίστοιχο κόστος και τις πιθανότητες επιτυχίας. Δεν θα επιμείνω περισσότερο στο σημείο αυτό και θα περάσω στην εξέταση των πειραμάτων.

IV. Τα πειράματα

Μέχρι σήμερα, έχουμε πραγματοποιήσει δύο είδη πειραμάτων:

A- Χρησιμοποιώντας τυποποιημένη μορφή: προκαταρκτική εξέταση (προ-τεστ) - μάθημα ηλεκτρονικών υπολογιστών - μεταγενέστερη εξέταση (μετά-τεστ)

• με συναρτήσεις 2ου βαθμού και μαθητές λυκείου (33 μαθητές ηλικίας 16 έως 18 ετών)

• με συναρτήσεις 1ου βαθμού και μαθητές γυμνασίου (20 μαθητές).

Στην πρώτη περίπτωση, το ερώτημα της συσχέτισης μεταξύ αλγεβρικών εξισώσεων και γραφικών αναπαραστάσεων έπαψε πια να αποτελεί θέμα επίσημης διδασκαλίας ενώ στη δεύτερη περίπτωση, αποτέλεσε το θέμα της συνήθους διδασκαλίας.

B- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μελέτης περιπτώσεων:

δύο μαθητές εργάζονται μαζί επί 8 ώρες επάνω στο λογισμικό και με διαφορετικά είδη συναρτήσεων (1ου, 2ου βαθμού, ρητών κλασμάτων πρώτου βαθμού).

Θα αναφερθούμε μόνο στο πρώτο πείραμα που οργανώθηκε σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:

• προ-τεστ σχεδιασμένη για να ελέγξει τη διαθεσιμότητα ορισμένων βασικών ατόμων γνώσης,

• μάθημα με το λογισμικό,

• 15 ημέρες μετά, προ-τεστ παρόμοια με το μετά-τεστ.

V. Παρουσίαση ορισμένων αποτελεσμάτων

A-Το πρώτο αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, εάν αναλογιστεί κανείς τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτό το πεδίο έρευνας: η αποτυχία της κλασικής εκπαίδευσης: στο προ-τεστ, μόνον ένα άτομο ξεπερνά σε ποσοστό επιτυχίας το 50%: το πρόσημο A**.** Αυτή η συνολική ιδιότητα της καμπύλης φαίνεται ευκολότερη από τις επί μέρους ιδιότητες .

Παρατηρούμε επίσης, μία προφανή διάταξη: πρόσημο A > ισότητα A > αντίθετα A > διάταξη τιμών A, που είναι σταθερή και στις τρεις μορφές.

Έτσι, η έννοια του ανοίγματος υπάρχει όμως η συσχέτιση παραστάσεων παραμένει πολύ περιορισμένη.

B- Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι το εξής: η παράξενη "αποτελεσματικότητα" ενός και μόνο μαθήματος με υπολογιστές, όπως αποδεικνύεται από το μετά-τεστ, με ορισμένα ενδιαφέροντα στοιχεία όπως η ειδική αντοχή του ατόμου γνώσεων: διάταξη τιμών **A**. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό αργότερα.

Κάτι συνέβη, αλλά τι ήταν αυτό; Τι μπορεί να συμβεί στην πραγματικότητα, σε ένα τόσο σύντομο χρονικό διάστημα;

Για να μελετήσουμε το σημείο αυτό, διεξήχθη λεπτομερέστατη ανάλυση όλων των εγγραφών. Εντοπίσθηκαν αρχικά δύο φαινόμενα:

• Πρώτον, για τους μαθητές λυκείου, η θετική εξέλιξη γνώσης, κάθε φορά που σημειωνόταν, λειτουργούσε ως φαινόμενο κρυσταλλοποίησης: η ένδειξη ατομικής γνώσης εμφανίσθηκε ξαφνικά σε μία άσκηση και, από τη στιγμή εκείνη, το άτομο φάνηκε ότι είχε αποκτήσει μία σταθερή κατάσταση (σημειώστε ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να συγκριθεί με ό,τι ο Schoenfeld αποκαλεί "μαθησιακό συμβάν" (learning event) και ότι, κατά τη μελέτη περιπτώσεων που διεξήγαγε πριν μερικά χρόνια, τέτοιου είδους συμβάντα ήταν πολύ σπάνια). Εδώ, τέτοια συμβάντα δεν είναι

σπάνια στους μαθητές λυκείου. Είναι όμως σπάνια στους μαθητές γυμνασίου: η εξέλιξή τους έχει περισσότερο χαώδη χαρακτήρα κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

• Δεύτερον, αυτά τα φαινόμενα κρυσταλλοποίησης συνοδεύονταν πάντοτε από αυτό που ονομάσαμε "αντιληπτό συμβάν" (perceptive event). Εντοπίσαμε διάφορους τύπους αντιληπτών συμβάντων. Τα κυριότερα είναι τα εξής:

- αντιμετώπιση ειδικής παραβολής,
- αντιμετώπιση δύο συνδεδεμένων παραβολών.

Ο κάθε μαθητής, παίζοντας με τον υπολογιστή επί μία ώρα, συναντά πολλά αντιληπτά συμβάντα που προκύπτουν από την αρχική επιλογή των παραβολών αλλά συχνότερα από τις χαράξεις που ζητά ο μαθητής και τις απαντήσεις που δίνει. Το κάθε αντιληπτό συμβάν δεν παράγει άμεσο θετικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, φαίνεται ότι τα αντιληπτά συμβάντα που λαμβάνουν χώρα στην αρχή του μαθήματος, είναι στατιστικά λιγότερο παραγωγικά από τα συμβάντα που λαμβάνουν χώρα αργότερα. Επίσης, φαίνεται ότι οι εξαιρετικά ειδικευμένες παραβολές δεν είναι πολύ παραγωγικές. (Πρόκειται για ενδιαφέρουσα παρατήρηση δεδομένου ότι η συνήθης διδασκαλία, η οποία προχωρεί από την απλούστερη προς την πιο περίπλοκη περίπτωση, λειτουργεί ακριβώς με τον αντίστροφο τρόπο). Ωστόσο, αυτά τα αντιληπτά συμβάντα είναι τόσα πολλά ώστε, ακόμη και με ένα μικρό ποσοστό αποτελεσματικότητας, μπορούν να παρουσιάσουν επιτυχή αποτελέσματα.

Σημειώστε επίσης, ότι όταν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν το είδος αλγεβρικού τύπου της απάντησής τους, παρουσιάζουν την τάση να ξεκινούν με τον πολυωνυμικό τύπο F1, ο οποίος τους είναι ο πλέον οικείος. Πολύ συχνά, δε γνωρίζουν ούτε καν μερική επιτυχία με τον τρόπο αυτό και οι πρώτες κατασκευές αποτελούν αντικείμενο παρατήρησης όταν αλλάζουν τους τύπους σε F2 και F3, οι οποίοι είναι εκ των προτέρων λιγότερο οικείοι. Οι κατασκευές με τον τύπο F1 είναι συχνά "κατασκευές εκ μεταφοράς" κατά την ακόλουθη έννοια: ένας μαθητής τα καταφέρνει αρκετές φορές με το F2 ή το F3 . Αποφασίζει να αλλάξει σε F1. Η πρώτη διαδικασία μεταφοράς παρουσιάζει συνήθως δυσκολίες και είναι ανεπαρκής: απλή μεταφορά της τιμής. Παρατηρήσαμε όμως, ότι φαίνεται ευκολότερο να διορθωθούν αυτές οι λανθασμένες διαδικασίες μεταφοράς από το να κατασκευασθεί απευθείας η αντίστοιχη γνώση από το F1.

Επομένως, ως συμπέρασμα, ελπίζουμε ότι δοκιμάζοντας και εμπλουτίζοντας τα χαρακτηριστικά των δικών μας διαδικασιών προσαρμογής που εμπλέκονται στο περιβάλλον αυτό, θα είμαστε σε θέση, στο εγγύς μέλλον, να εφαρμόσουμε επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο των δεδομένων που συλλέγησαν στο interface επιτρέποντας μία αυτοπροσαρμοζόμενη επιλογή των ενεργειών (auto-adaptive selection of the tasks).

VI. Ορισμένα ερωτήματα σχετικά με το θέμα

Όμως, ακόμη κι αν επιτύχουμε, γεννιέται αυτομάτως το εξής ερώτημα: τι έχουν μάθει τελικά οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος;

Επανέρχομαι στην περίπτωση του συντελεστή Α ο οποίος, κατά την άποψή μου, βασίζεται στη διαίσθηση. Πολύ συχνά, οι μαθητές που τα καταφέρνουν, στο τέλος του μαθήματος, έχουν εξοικειωθεί τόσο με την οπτική αντίληψη του ανοίγματος της παραβολής ώστε, με τρεις δοκιμές το πολύ, μπορούν να βρουν την ακριβή τιμή του Α (το οποίο εδώ είναι ακέραιος αριθμός). Η θετική τους προσαρμογή στο λογισμικό τους οδήγησε στις ακόλουθες στρατηγικές:

• Για τον τύπο F1:

1. διάβασε το Γ
2. εκτίμησε το Α
3. υπολόγισε το Β χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες ενός ειδικού σημείου και επιλύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση.
4. επέλεξε τη σωστή απάντηση
5. σε περίπτωση λάθους, άλλαξε την εκτίμηση του Α κ.ο.κ.

• Για τους τύπους F2 και F3:

1. διάβασε τα Β,ή Β, Γ
2. εκτίμησε το Α
3. σε περίπτωση λάθους, άλλαξε την εκτίμηση του Α κ.ο.κ.

Οι μαθητές δεν προσπάθησαν να επινοήσουν έναν τρόπο για να βρουν την ακριβή τιμή του Α ούτε και την τιμή του Β (για παράδειγμα, διαβάζοντας το Β ως την τιμή της κλίσης της παραβολής στο σημείο τομής με τον άξονα ψ). Φαίνεται ότι αυτή η οργανωμένη διαδικασία δοκιμών διατήρησε αμείωτη την αγωνία του μαθητή σε μία κατάσταση η οποία, σε αντίθετη περίπτωση, θα είχε χάσει όλο της το ενδιαφέρον.

Όπως φανερώνουν σαφέστατα τα αποτελέσματα του προ-τεστ, η οικειότητα αυτή με το άνοιγμα δε συνεπάγεται ότι οι μαθητές έχουν την ικανότητα, σε μία ειδική εργασία χαρτιού-μολυβιού, να δώσουν εντολές για παραβολές σύμφωνα με την τιμή του Α. Το γεγονός αυτό μας προκάλεσε πραγματική έκπληξη. Στην αρχή δεν μπορούσαμε να φανταστούμε ότι κάποιος που χειριζόταν την αναζήτηση της τιμής του Α με τόσο αποτελεσματικό τρόπο, δε θα ήταν ικανός να δίνει εντολές για τιμές του Α σε ζωγραφισμένες παραβολές, επειδή η δεύτερη ειδική εργασία μας φαινόταν πολύ πιο εύκολη.

Πιστεύω ότι στο σημείο αυτό, θίγουμε ένα κεντρικό θέμα που συνδέεται με το ειδικό χαρακτηριστικό των διαδικασιών προσαρμογής. Κάποια γνώση έχει διαμορφωθεί ήδη. Ήταν ιδιαίτερα αντιληπτή και δε βασιζόταν απαραίτητα στην ισχυρή σχέση μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού επιπέδου. Λειτούργησε περισσότερο ως άμεση σύνδεση μεταξύ οπτικού και αριθμητικού επιπέδου. Με άλλα λόγια, οι μαθητές έφτιαξαν ένα σχήμα, ή διαφορετικά

"μία σταθερή κατάσταση δράσης" (invariant regularity of action), αλλά τα θεμέλια του σχήματος όσον αφορά τις αντιληπτές σταθερές, δεν ήταν τόσο σαφή και δεν ήταν απαραίτητα τα αναμενόμενα.

Εάν επανέλθουμε στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη χρήση εργαλείων γραφικών για τα μαθηματικά, πρέπει να γνωρίζουμε την ύπαρξη τέτοιων φαινομένων και να υποβάλλουμε το ακόλουθο ερώτημα: πώς μπορούμε να επωφεληθούμε από τις συνολικές αντιληπτές μορφές γνώσης οι οποίες ευνοούνται από την αλληλεπίδραση με τέτοιου είδους περιβάλλοντα και ταυτόχρονα να φροντίσουμε ώστε να μην αποτελέσουν γνωστικά εμπόδια για πιο αναλυτικές μορφές γνώσης, μορφές που είναι απαραίτητες για μαθηματικές δραστηριότητες; Τι είδους διδακτικού περιβάλλοντος πρέπει να συνδέσουμε στο λογισμικό αυτό ώστε να ελέγχουμε καλύτερα τη διαλεκτική εξέλιξη αυτών των δύο συμπληρωματικών και εξίσου απαραίτητων μορφών γνώσης;

Σημειώστε ότι εμείς, ως μαθηματικοί, δεν αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αυτό: πρώτα κατασκευάσαμε ό,τι δεν κατασκεύασαν οι μαθητές μας, ακόμη και στην τυποποιημένη διδασκαλία, δηλαδή ισχυρά αναλυτικές μορφές γνώσης και στη συνέχεια, γνωρίσαμε τα προϊόντα λογισμικού.

Βιβλιογραφία

1. Dagher A. (1993): *Environnement informatique et apprentissage de l´articulation entre registres algébrique et graphique de représentation des fonctions*, Doctoral Thesis, University Paris 7.

2. Douady R. (1984): *Dialectique outil/objet et jeu de cadres*, Doctoral Thesis, University Paris 7.

3. Duval R. (1988): *Graphiques et équations*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. I, 235-253.

4. Larher A. (1991): *Implication statistique et application à l´analyse de démarche de preuve mathématique*, Doctoral Thesis, University Rennes I.

5. Leinhardt G., Zaslavski O., Stein M. K. (1990): Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching, *Review of Educational Research*, vol. 60 no 1, 1-64.